Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°14

1. Séries de matrices

Exercice 1.

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la C, conjecturer la formule d'une exponentielle de matrice diagonale par blocs puis utiliser la formule suivante (qu'on admettra) : si M, N **commutent**, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Démontrer que la série $\sum A^n$ converge, et donner la valeur de $\sum_{n\geq 0} A^n$.

Exercice 3.

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $\exp(tA)$.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Exercice 5.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

2. Séries numériques : techniques de Spé

a. Exercices basiques

Exercice 6.

Étudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ **2.** $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ **3.** $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 8.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Exercice 9.

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2.** $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Exercice 10.

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 11.

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Exercice 12.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 13.

1. En remarquant que $\frac{1}{n} \sim_{+\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$, donner un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2. En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, donner un équivalent du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 14.

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 15.

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$.

b. Exercices d'entraînement

Exercice 16.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq N$, $b_N a_n \leq a_N b_n$.
   (b) En déduire que
      i. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
      ii. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.
2. Soit $\alpha > 0$ et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier que
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
3. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ avec
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   (a) On suppose $\beta > 1$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait, en gardant les mêmes notations pour (b_n),
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   En déduire que $\sum_n a_n$ converge.
   (b) Démontrer que si $\beta < 1$, alors $\sum_n a_n$ diverge.
   (c) Application : Soit $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Démontrer que $\sum_n a_n$ diverge.

Exercice 17.

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 18.

Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 19.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
   Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20.

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0, et on considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son

reste. On suppose de plus que la suite (u_n) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
3. En déduire que $R_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 21.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$
Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$
On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Exercice 22.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 23.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n).$$
Démontrer que $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

2. Démontrer que la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.