Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°14

1. Séries de matrices

Exercice 1.

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la C, conjecturer la formule d'une exponentielle de matrice diagonale par blocs puis utiliser la formule suivante (qu'on admettra) : si M, N **commutent**, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.

Correction.

1. On a $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + e^4 & 0 & e^2 - e^4 \\ 2(e^4 - e^2) & e^4 & 2(e^4 - e^2) \\ e^2 - e^4 & 0 & e^2 + e^4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $B = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\exp(B) = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{1+i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1-i} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e\cos(1) & e\sin(1) & -e\sin(1) \\ 0 & e & 0 \\ e\sin(1) & e(1-\cos(1)) & e\cos(1) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

3. On a les résultats suivants :
   - si $M = \operatorname{diag}(M_1, ..., M_k) \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale par blocs où $M_i \in M_{p_i}(\mathbb{K})$ avec $\sum_{i=1}^k p_i = n$, alors :

$$\exp(M) = \operatorname{diag}(\exp(M_1), ..., \exp(M_k));$$

   - si M, N communtent, alors $\exp(MN) = \exp(M)\exp(N)$.

Ainsi, comme $C = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ est diagonale par blocs, on calcule l'exponentielle de chacun des blocs.
On a $\exp(3) = e^3$ et on remarque que $C' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + E_{1,2}$ où $2I_2$ et $E_{1,2}$ commutent, donc $\exp(C') = \exp(2I_2)\exp(E_{1,2})$.
De plus, $E_{1,2}$ est nilpotente d'indice 2, donc, pour tout $n \geq 2$, $E_{1,2}^n = 0_2$ et ainsi :

$$\exp(E_{1,2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{1,2}^n}{n!} = I_2 + E_{1,2}$$

Par suite,

$$\exp(C') = \exp(2I_2)\exp(E_{1,2}) = e^2 I_2.(I_2 + E_{1,2}) = e^2(I_2 + E_{1,2})$$

Il en résulte que :

$$\exp(C) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(3) & 0 \\ \hline 0 & \exp(C') \end{array}\right) = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Démontrer que la série $\sum A^n$ converge, et donner la valeur de $\sum_{n\geq 0} A^n$.

Correction.

On va commencer par diagonaliser A. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}$ dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{3}$. De plus, la recherche des vecteurs propres donne $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a aussi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fixons maintenant $N \in \mathbb{N}$, et utilisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right)P^{-1}.$$

Maintenant,

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{3^n} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{N} D^n = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{1}{2^N}}{1-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\frac{(-1)^{N+1}}{3^{N+1}}}{1+\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la série $\sum_n D^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Par continuité du produit matriciel, la série $\sum_n A^n$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $\exp(tA)$.

Correction.

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(X) = (X-1)^3$.
2. Posons $N = A - I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N. En effet, on a

$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

D'autre part, puisque $tA = tI_3 + tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a

$$\exp(tA) = \exp(tI_3)\exp(tN) = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$

On en déduit

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Correction.

Notons C_A le polynôme caractéristique de A qui, rappelons-le, est annulateur pour A. Soit $k \geq 0$. Si on effectue la division euclidienne de X^k par $C_A(X)$, on obtient

$$X^k = C_A(X)Q_k(X) + R_k(X)$$

où $\deg(R_k) \leq n-1$. Évaluons cette égalité en A. On obtient

$$A^k = R_k(A).$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout $k \geq 0$, $A^k \in \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, A, \ldots, A^{n-1})$. Notons F ce sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, on sait que, pour tout $n \geq 0$, la matrice S_n définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ est élément de F. Comme F est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (un sous-espace est toujours fermé en dimension finie) et que (S_n) converge vers $\exp(A)$, on en déduit que $\exp(A)$ est élément de F, donc est un polynôme en A (de degré inférieur ou égal à $n-1$).

Exercice 5.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Correction.

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= e^a \left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}\right)\left(I_3 + cB^2\right) \\ &= e^a \left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c\right) B^2\right)\end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2} + c\right) e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

2. Séries numériques : techniques de Spé

a. Exercices basiques

Exercice 6.

Étudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ **2.** $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ **3.** $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Une série dont le terme général est constitué de puissances et de factorielles est très bien adaptée à l'utilisation du critère de D'Alembert. Dans le cas particulier de cette question, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \times \frac{1}{(n+1)^{a-1}}.$$
Or, on peut écrire
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \exp\left(-an\ln(1+1/n)\right) = \exp(-a + o(1))$$
et donc ce terme converge vers e^{-a}. On distingue alors trois cas :
   — Si $a > 1$, u_{n+1}/u_n tend vers 0, la série $\sum_n u_n$ converge.
   — Si $a = 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $e^{-1} \in [0, 1[$, et donc la série $\sum_n u_n$ converge.
   — Si $a < 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$, et donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

2. On va utiliser la règle de d'Alembert. Pour cela, on écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp\big(n\big(\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln n\big)\big) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$. On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que

$$|\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(n)| \leq \frac{1}{n\ln n}.$$

Il en découle :

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp\left(\frac{n}{n\ln n}\right) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On en déduit facilement, par les théorèmes de composition des limites et par le fait que $\ln(n+1)/(n+1)$ tend vers 0, que la limite de u_{n+1}/u_n est nulle. Par la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n est convergente.

3. On va encore utiliser la règle de d'Alembert. En effet, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} a$$

avec

— $a = 0$ si $\alpha < 2$: dans ce cas, on a convergence de la série

— $a = \infty$ si $\alpha > 2$: dans ce cas, on a divergence de la série

— $a = \frac{1}{4}$ si $\alpha = 2$: dans ce cas, on a convergence de la série.

Exercice 7.

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Correction.

1. Cette série est bien adaptée à l'utilisation de la règle de d'Alembert. On calcule donc

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} \\ &= a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= a\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= a\exp\left(-n\times\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

On obtient donc que u_{n+1}/u_n converge vers a/e. Par application de la règle de d'Alembert, si $a > e$, la série est divergente. Si $a < e$, la série est convergente. Le cas $a = e$ est un cas limite où le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure directement.

2. On pousse un peu plus loin le développement précédent. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= e\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

En particulier, pour n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. Elle ne converge donc pas vers zéro, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 8.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Correction.

On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Puisque la fonction ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt.$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n et, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt.$$

Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x\ln x - x$, on trouve que

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

On divise par $n \ln n$ pour prouver que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n \ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} \to 1.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n \ln n}.$$

Exercice 9.

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2.** $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Correction.

1. On a :
$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$
et la série converge absolument.
2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.
3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Exercice 10.

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Correction.

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.

2. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n}$ et $t_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Notons U_n, V_n, W_n et T_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente, (W_n) est divergente, et (T_n) est convergente. En effet, $|t_n| \sim_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et la série $\sum_n t_n$ est absolument convergente. Donc (U_n) est somme de deux suites convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.
4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge. Dans le théorème de comparaison de deux séries, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse que les termes généraux gardent le même signe. Une autre conclusion est que $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$, (a_n) tend vers 0, et pourtant $\sum_n u_n$ diverge. Dans le critère des séries alternées, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse (a_n) décroit.

Exercice 11.

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Correction.

On va d'abord déterminer un équivalent du numérateur par encadrement à une intégrale. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}dx.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n pour trouver

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \leq v_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$$

où on a posé

$$v_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}.$$

On calcule les intégrales, et on en déduit que

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Il vient

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}-\alpha}.$$

La série $\sum_n u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha > \frac{5}{2}$. On peut aussi démontrer ceci par des majorations et des minorations un peu plus simple. D'abord, il est clair que

$$0 \leq u_n \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$

ce qui démontre la convergence si $\alpha > 5/2$. D'autre part, si k est compris entre $n/2$ et n, alors $\sqrt{k} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ et donc

$$u_n \geq \frac{\left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)\sqrt{n}}{\sqrt{2}n^\alpha} \geq \frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{2}n^\alpha}.$$

Notons v_n le membre de droite de cette inégalité. Il est équivalent à $\frac{C}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$. Si $\alpha \leq 5/2$, la série $\sum_n v_n$ diverge et il en est de même de $\sum_n u_n$ puisque $0 \leq v_n \leq u_n$.

Exercice 12.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Correction.

1. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$$

   et ceci quelque soit la valeur de β. Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.
2. On va comparer cette fois à la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a en effet

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n.$$

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général u_n diverge.

3. (a) Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente.

(b) Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}\right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ et on a même que pour tout entier $n \geq 2$

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$.

(c) Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

Exercice 13.

1. En remarquant que $\frac{1}{n} \sim_{+\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$, donner un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2. En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, donner un équivalent du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Correction.

1. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente (et son terme général est positif). On sait donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

car la somme apparaissant à droite est télescopique. Puisque de plus $\ln(n+1) \sim_{+\infty} \ln n$, on obtient finalement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln(n)$.

2. Cette fois, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (et son terme général est positif). On sait donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et la dernière somme est une somme télescopique. On trouve donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Exercice 14.

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Correction.

1. Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{5^n}$$

et que le membre à droite de cette inégalité et le terme général d'une série convergente. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert (ce qui est légitime puisqu'on a affaire à une série à termes positifs). Observant que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{25} \times \frac{2k-1}{2k+1} \to \frac{1}{25}$$

on en déduit que la série de terme général u_n est convergente.

2. L'équation précédente montre qu'en réalité

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}.$$

Par récurrence, on obtient que

$$u_{n+k+1} \leq 25^{-k} u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$R_n \leq u_{n+1} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 25^{-k} = \frac{25}{24} u_{n+1}.$$

3. Dès $n = 2$, on a $R_n < 0,001$. Une valeur approchée à 10^{-3} près est donc donnée par $u_1 + u_2 \simeq 0,202$.

Exercice 15.

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

Correction.

On remarque d'abord que la série est convergente. Il s'agit d'une série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ où $a_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$ est une suite décroissante vers 0. Notons S_n la somme partielle d'ordre n de cette série et S cette somme. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et on sait que S est encadré par deux sommes partielles consécutives. Plus précisément ici, en tenant compte du fait que $S_{2n-1} \leq S_{2n}$, on a $S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}$. Il suffit donc de calculer S_{2n-1} et S_{2n} jusqu'à ce que $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n\ln(2n+1)} \leq 10^{-5}$.

b. Exercices d'entraînement

Exercice 16.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq N$, $b_N a_n \leq a_N b_n$.
   (b) En déduire que
      i. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
      ii. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.
2. Soit $\alpha > 0$ et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ avec

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(a) On suppose $\beta > 1$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait, en gardant les mêmes notations pour (b_n),

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

En déduire que $\sum_n a_n$ converge.

(b) Démontrer que si $\beta < 1$, alors $\sum_n a_n$ diverge.

(c) Application : Soit $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Démontrer que $\sum_n a_n$ diverge.

Correction.

1. (a) On procède par récurrence sur n. Pour $n \geq N$, posons P_n : "$b_N a_n \leq a_N b_n$". Initialisation : on a $b_N a_N = a_N b_N$ donc P_n est vraie. Hérédite : Soit $n \geq N$ telle que P_n est vraie. Alors on a

$$\begin{aligned} b_N a_{n+1} &\leq b_N a_n \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ &\leq a_N b_n \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq a_N b_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie. Conclusion : Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier $n \geq N$.

(b) i. On a $0 \leq a_n \leq \frac{a_N}{b_N} b_n$ et la série $\sum_n b_n$ converge. Par majoration de séries positives, la série $\sum_n a_n$ converge.

ii. On a $0 \leq \frac{b_N}{a_N} a_n \leq b_n$ et la série $\sum_n a_n$ diverge. Par minoration de séries positives, la série $\sum_n b_n$ diverge.

2. C'est un simple développement limité. En effet, on a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. (a) Soit $\alpha \in]1; \beta[$. Alors on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, $\alpha - \beta < 0$. Donc, pour n assez grand, $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n}$ est du signe de $\frac{\alpha-\beta}{n}$, c'est-à-dire est négatif. On a donc l'existence de $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Puisque $\sum_n b_n$ converge (puisque $\alpha > 1$), on conclut en utilisant le résultat de la question 1.

(b) On fait un raisonnement similaire, mais en choisissant cette fois $\alpha \in]\beta; 1[$. De la même façon, on démontre l'existence de $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Puisque $\sum_n b_n$ diverge, on déduit de la question 1 la divergence de $\sum_n a_n$ (on échange bien sûr le rôle joué par (a_n) et (b_n)).

(c) On a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{2n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Appliquons le résultat précédent avec $\beta = 1/2$, on trouve que la série $\sum_n a_n$ est divergente.

Exercice 17.

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Correction.

1. Supposons d'abord $a > 1$, et prenons $b \in]1, a[$. Posons aussi $v_n = \frac{1}{n^b}$. Alors on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^b}{(n+1)^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Par récurrence, on montre aisément par récurrence sur n que, pour $n \geq n_0$,

$$u_n \leq C v_n$$

avec $C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$. Par comparaison (les séries sont à terme positif), la série de terme général u_n converge puisque la série de terme général v_n converge.

2. Dans le cas où $a < 1$, on procède de même en choisissant cette fois $b \in]a, 1[$. On trouve alors que, pour n assez grand,
$$u_n \geq C v_n.$$
Puisque la série de terme général v_n diverge (cette fois, $b < 1$), la série de terme général u_n diverge.

3. Posons $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^b}$ dont on rappelle qu'elle converge si et seulement si $b > 1$. Alors,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^b = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(1+1/n)}\right)^b.$$
Or,
$$\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)} = \frac{\ln n}{\ln n + O(1/n)} = \frac{1}{1 + O(1/n \ln n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$
Mettant à la puissance b, on a
$$\left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)}\right)^b = 1 + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$
Effectuant le produit des deux développements limités, on trouve qu'au premier ordre,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi, on trouve le même résultat, alors que la série de terme général u_n est parfois convergente, parfois divergente. Le cas $a = 1$ est bien un cas limite.

4. (a) On a
$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{n u_n}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

   (b) La question précédente prouve que la série de terme général w_n converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} w_k \to C$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln(n u_n) - \ln(u_1)$. On en déduit que la suite $(\ln(n u_n))$ converge vers un réel. Passant à l'exponentielle, on en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $n u_n \to \lambda$ c'est-à-dire $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n diverge.

Exercice 18.

Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Correction.

Posons, pour $a > 0$, $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2} dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2} dx.$$

On calcule ces intégrales et on trouve

$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 19.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction.

1. (a) On sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité entre $k-1$ et k.

   (b) On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :
$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$
soit encore
$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$
Puisque
$$\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \to 1,$$
on en déduit le résultat demandé.

2. Une intégration par parties donne
$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt = \frac{2}{2n+1}f(0) - \frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)f(\pi) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.$$
D'une part, on a
$$\frac{2}{2n+1}f(0) - \frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)f(\pi) \to 0$$
(produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0). De plus, on a aussi
$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$
et donc on a
$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt \to 0.$$

3. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0, \pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + \Re e\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Une petite formule de trigo donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$

ce qui finalement donne le résultat.

4. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2 + bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at + b)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= 0 - \left[(2at + b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt \\ &= \frac{(2a\pi + b)(-1)^n - b}{n^2}. \end{aligned}$$

Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b = -1$ et $a = 1/2\pi$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$

avec $f(t) = \frac{at^2+bt}{2\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0, \pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t \in]0, \pi]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2(2at + b)\sin(t/2) - (at^2 + bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \\ &= \frac{2(2at + b)(t/2 + o(t^2)) - (at^2 + bt)(1 - t^2/2 + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} \\ &= \frac{at^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \to a. \end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

6. On a

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$$

d'après la première question.

Exercice 20.

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0, et on considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son reste. On suppose de plus que la suite (u_n) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
3. En déduire que $R_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

Correction.

1. D'après le critère des séries alternées, R_n est du signe de son premier terme, $(-1)^{n+1}u_{n+1}$, ou encore de $(-1)^{n+1}$ puisque u_{n+1} est positif. On a donc $|R_n| = (-1)^{n+1}R_n$ et $|R_{n+1}| = (-1)^{n+2}R_{n+1}$. On en déduit que

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^{n+1}(R_n - R_{n+1}) = u_{n+1}.$$

2. En reprenant le même raisonnement, on a

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^{n+1}(R_n + R_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k(u_k - u_{k+1}) \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k \end{aligned}$$

où on a posé $v_k = u_k - u_{k+1}$. On note que v_k est positif puisque la suite (u_n) est décroissante et que (v_k) tend vers 0. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$v_k - v_{k+1} = u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2} \geq 0.$$

La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k$ vérifie donc le critère des séries alternées et est du signe de $(-1)^{n+1}$. On obtient bien que $|R_n| - |R_{n+1}|$ est positif.

3. D'après les deux questions précédentes, on a

$$u_{n+1} \leq 2|R_n| \text{ et } 2|R_{n+1}| \leq u_{n+1}$$

ce qui peut se réécrire en

$$\frac{u_{n+1}}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_n}{2}.$$

Sachant que u_{n+1}/u_n tend vers 1, on en déduit que $|R_n| \sim_{+\infty} \frac{u_n}{2}$. Maintenant, on sait aussi que $R_n = (-1)^{n+1}|R_n|$. On en déduit le résultat demandé.

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 21.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$
Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$
On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Correction.

1. L'idée est de se ramener à une somme télescopique. En effet, on a, pour tout $n \geq p$,
$$Au_{n+1} \leq a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}.$$
Soit $N \geq p$, on somme les inégalités précédentes pour n allant de p à $N-1$. On obtient
$$A \sum_{n=p}^{N-1} u_{n+1} \leq a_p u_p - a_N u_N \leq a_p u_p.$$
Notant $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ la somme partielle de la série, on obtient
$$S_N \leq \frac{a_p u_p}{A} + S_p.$$
Autrement dit, la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ est majorée. Comme on a affaire à une série à termes positifs, ceci assure la convergence de la série.
2. L'hypothèse s'écrit encore $a_{n+1} u_{n+1} \geq a_n u_n$ pour tout $n \geq p$. On en déduit que $a_n u_n \geq a_p u_p$, et donc que
$$u_n \geq a_p u_p \times \frac{1}{a_n}.$$
Or la série $\sum_n \frac{1}{a_n}$ est divergente et à termes positifs. On a donc par comparaison divergence de la série $\sum_n u_n$.
3. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1$. Posons $a_n = 1$. Alors $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 < 0$, et donc pour n assez grand, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 0$. Puisque la série $\sum_n 1$ diverge, il en est de même de $\sum_n u_n$. Au contraire, supposons maintenant que $l < 1$ et, dans un premier temps, $l \neq 0$. On prend la même suite (a_n), et on observe que $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 > 0$, et donc pour n assez grand, on a
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq \frac{\frac{1}{l} - 1}{2} > 0.$$

Par le premier point, $\sum_n u_n$ converge. Finalement, si $l = 0$, alors u_n/u_{n+1} tends vers $+\infty$ et donc, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq 1.$$

On conclut à nouveau à la convergence de $\sum_n u_n$ à l'aide de la première question.

4. Pour les deux séries, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car on est dans son cas litigieux où le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1. On va conclure par la règle de Kummer en utilisant à chaque fois $a_n = n$. Pour la première série, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1} \leq 0.$$

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de $\sum_n u_n$. Pour la deuxième série, on a cette fois

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi, par la règle de Kummer, la série est convergente.

Exercice 22.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Correction.

On va comparer à une intégrale chaque terme $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$. Ce ne semble pas si facile ! Mais on peut remarquer que, pour $n \geq 2$,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On en déduit, pour tout $N \geq 2$, que

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_N} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)S_1^{\alpha-1}}.$$

La série est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle est convergente.

Exercice 23.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n).$$

Démontrer que $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

2. Démontrer que la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Correction.

1. On écrit que
$$u_n = \int_n^{n+1} \big(f(t) - f(n)\big)dt.$$
Il vient
$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)|dt.$$
Or, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a
$$f(t) - f(n) = \int_n^t f'(u)du$$
d'où il vient
$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} \int_n^t |f'(u)|dudt \leq \int_n^{n+1} \int_n^{n+1} |f'(u)|dudt \leq \int_n^{n+1} |f'(u)|du.$$
Puisque f' est intégrable, on sait que la suite $\left(\int_1^n |f'(t)|dt\right)$ converge, ou encore que la série $\sum_n \int_n^{n+1} |f'(t)|dt$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_n |u_n|$ converge.
2. C'est presque immédiat. On écrit en effet
$$f(n) = \int_n^{n+1} f(t)dt - u_n.$$
Puisque la série $\sum u_n$ converge, la convergence de $\sum f(n)$ équivaut à la convergence de $\sum_n \int_n^{n+1} f(t)dt$, c'est-à-dire à la convergence de la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$.
3. Posons $f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}$. On va déjà prouver que l'on est dans les conditions d'application du résultat précédent. Pour cela, on remarque que
$$f'(t) = \frac{\frac{t}{2\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{t^2} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$
Ainsi, f' est bien intégrable sur $[1, +\infty[$. On prouve ensuite que la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ est convergente. C'est classique. Par le changement de variables $u = \sqrt{t}$, on a
$$\int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin u}{u}du.$$
La convergence de cette dernière intégrale se démontre en effectuant une intégration par parties...