Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°15

1. Suites et séries de fonctions

Exercice 1.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 4.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 5.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 6.

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0,1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 7.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

   et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      ii) la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a, b]$.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 12.

Soient I et J deux intervalles et (g_n) une suite de fonctions de I dans J qui converge uniformément sur I vers une fonction g. Soit $f \in C^0(J, \mathbb{R})$ et (h_n) la suite définie par $h_n = f \circ g_n$.

1. Montrer que si J est un segment, alors la suite (h_n) converge uniformément.
2. Que se passe-t-il si on ne suppose plus que J est un segment ?