Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°15

1. Suites et séries de fonctions

Exercice 1.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction.

1. L'inégalité $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ prouve que f_n converge simplement vers la fonction nulle. Posons $g(x) = e^{-x}\sin(2x)$. On a $f_n(x) = g(nx)$, et donc la suite
$$\|f_n\|_\infty = \|g\|_\infty > 0$$
vaut une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$: la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, si $a > 0$ et $x \geq a$, on a :
$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$
ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
2. Si $x \neq 0$, $(f_n(x))$ tend vers 0 (c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0, 1[$), et si $x = 0$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 1. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction f égale à 1 en 0 et égale à 0 partout ailleurs. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction limite ne l'est pas en 0. En revanche, la convergence est uniforme sur les intervalles du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$
et le dernier terme de cette inégalité (qui ne dépend plus de $x \in [a, +\infty[$), tend vers 0.

Exercice 2.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Correction.

Les fonctions f_n sont paires, on peut restreindre l'étude à $[0, +\infty[$. $f_n(0) = n$ et donc $(f_n(0))$ diverge. Pour $x > 0$, la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que $(ne^{-n^2x^2})$

tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur $[a, +\infty[$, les fonctions (f_n) sont positives et décroissantes. On a donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$$

et comme $(f_n(a))$ tend vers 0, il en est de même de $(\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0|)_n$. La convergence est donc uniforme sur $[a, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Correction.

Prenons $x \in [0, 1]$. Puisque f_n est décroissante,

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

Il vient

$$\|f_n\|_\infty \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|).$$

Le terme de droite tend vers 0, et donc (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 4.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Correction.

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2u_n(x) = x^2e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}$ tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.
2. On va calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$. On remarque d'abord que u_n est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut

$$u_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

On en déduit que u_n est croissante sur l'intervalle $[0, 2/\sqrt{n}]$ et décroissante sur l'intervalle $[2/\sqrt{n}, +\infty[$. On a donc

$$\|u_n\|_\infty = u_n(2/\sqrt{n}) = 4e^{-2}.$$

C'est le terme général d'une série (grossièrement) divergente, et donc la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq 2/\sqrt{n}$ et donc la fonction u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x \geq a$, on a

$$|u_n(x)| \leq u_n(a).$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique (il ne dépend plus de x) convergente : ceci prouve la convergence normale de la série $\sum_n u_n$ sur $[a, +\infty[$. Remarquons que le fait que l'inégalité ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang (qui est indépendant de $x \in [a, +\infty[$) ne change rien à la convergence normale.

4. Notons R_n le reste d'ordre n de la série. Puisque $u_k \geq 0$ pour tout k, on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$

D'après le résultat de la question 2.,

$$\|R_n\|_\infty \geq \|u_{n+1}\|_\infty = 4e^{-2}.$$

Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Correction.

1. On va appliquer le critère des séries alternées. Il est clair que $|u_n(x)|$ tend vers 0, reste à voir que, pour $x \geq 0$, on a $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)|$. Mais,

$$\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)},$$

et on conclut par croissance de la fonction logarithme.

2. Le critère des séries alternées nous donne même une majoration du reste de la série. On a en effet

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k\geq n+1} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$$

où on a utilisé que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > -1$. On a majoré le reste pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par une quantité qui ne dépend plus de x et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. On n'a même pas convergence absolue de la série à $x > 0$ fixé. Par exemple,

$$|u_n(1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum_n |u_n(1)|$ diverge. A fortiori, il en est de même de la série $\sum_n \|u_n\|_\infty$.

Exercice 6.

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0,1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Correction.

1. Pour $x \in]0,1[$, $u_n(x) > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \to x \in]0,1[.$$

Par le critère de d'Alembert, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. Si $x = 1$, alors $u_n(x) = 0$ et la convergence est triviale. De plus, on a clairement $S(1) = 0$. La convergence dans le cas $x = 0$ est elle aussi triviale.

2. Pour étudier la convergence normale, on doit étudier la série $\sum_n \|u_n\|_\infty$. Pour calculer $\|u_n\|_\infty$, on dérive u_n :

$$u_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}\left(n(1-x) - x\right).$$

Ainsi, u_n' s'annule en 0 et en $x_n = \frac{n}{n+1}$ qui sont tous les deux des points de $[0,1]$. Puisque $u_n(0) = u_n(1) = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\infty &= |u_n(x_n)| \\ &= n^a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Or, en passant par l'exponentielle et le logarithme, on prouve facilement que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}.$$

On en déduit que
$$\|u_n\|_\infty \sim_{+\infty} e^{-1} n^{a-1}.$$
Ainsi, il y a convergence normale si et seulement si $a < 0$.

3. Si $a = 0$ et $x \in [0, 1[$, on peut encore écrire
$$S(x) = \sum_{n\geq 1} x^n - \sum_{n\geq 1} x^{n+1} = x.$$
Ainsi, $S(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $S(1) = 0$. La convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$. En effet, si cela était le cas, alors puisque chaque terme $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur $[0, 1]$, ce serait également le cas de la somme, ce qui n'est pas le cas ici.
4. Nous allons utiliser la question précédente, en remarquant que, pour $x \in [0, 1[$, $a > 0$ et $n \geq 1$,
$$n^a x^n (1 - x) \geq x^n (1 - x)$$
ce qui implique $S(x) \geq x$ si $x \in [0, 1[$. Une nouvelle fois, ceci interdit la convergence uniforme puisque l'inégalité précédente implique que S n'est pas continue en 1.

Exercice 7.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.
2. On va prouver la convergence normale. On a en effet, pour tout $x \in [0, A]$,
$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$
terme général d'une série convergente.
3. Il suffit d'écrire que, pour $n + 1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2 + k^2 \leq 5n^2$, et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5n}$. On

obtient finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

4. Il est plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq 2\varepsilon.$$

En particulier, pour $n = N$ et $x = N$, on a la double inégalité

$$\frac{1}{5} \leq \left| \sum_{k=N+1}^{2N} u_k(N) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Bien sûr, si on a choisi $2\varepsilon < 1/5$, c'est impossible.

5. Nous allons prouver la convergence uniforme en utilisant le critère des séries alternées. En effet, à x fixé, la suite $(u_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)$ est donc convergente, et on a la majoration du reste :

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \right| \leq u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Reste à majorer le membre de droite de l'équation précédente par un terme qui tend vers 0 et ne dépend pas de x. Mais on a

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+n^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \leq \frac{1}{n}.$$

On a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

6. Puisque $|(-1)^n u_n(x)| = |u_n(x)|$, la convergence normale sur $[0, A]$ se démontre comme ci-dessus.
7. D'autre part, si on avait convergence normale sur $\mathbb{R}_+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_n u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la première question.

Exercice 8.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.
2. Une étude rapide de u_n montre qu'elle atteint son maximum en $1/n$. On a donc

$$\sum_{n \geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n \geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.
3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour $x > 0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ et $0 < e^{-x} < 1$. De plus, pour $k \geq n+1$, on a

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{x(e^{-x})^k}{\ln(n+1)}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut étudier cette fonction ou remarquer que

— Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \to 1.$$

— La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type $[0, A]$.

— La fonction tend vers 0 en $+\infty$, on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle $[A, +\infty[$.

On peut aussi écrire

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$

puisque par convexité de la fonction exponentielle, $e^x - 1 \geq x$. Soit M un majorant de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$ (l'inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

2. Une étude rapide de u_n montre qu'elle atteint son maximum en $1/n$. On a donc

$$\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.

3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour $x > 0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ et $0 < e^{-x} < 1$. De plus, pour $k \geq n+1$, on a

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{x(e^{-x})^k}{\ln(n+1)}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut étudier cette fonction ou remarquer que

— Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \to 1.$$

— La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type $[0, A]$.

— La fonction tend vers 0 en $+\infty$, on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle $[A, +\infty[$.

On peut aussi écrire

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$

puisque par convexité de la fonction exponentielle, $e^x - 1 \geq x$. Soit M un majorant de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$ (l'inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Correction.

1. (a) Pour 0, $f_n(0) = 0$ et la suite converge. Pour $x > 0$, la suite $(g(x)e^{-nx})$ tend vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers 0.
   (b) Notons M un majorant de $|g|$. Pour $x > a$, on a $|f_n(x)| \leq Me^{-nx} \leq Me^{-na}$, suite qui tend vers 0 indépendamment de x. Ceci prouve la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
   (c) Par continuité de g en 0, et puisque $g(0) = 0$, il existe $a > 0$ tel que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in [0, a]$. Il vient $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$. De plus, ce a étant fixé, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$. On peut donc trouver N tel que, pour

$n \geq N$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. Résumons. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$

(le a n'apparait plus, il sert uniquement dans la preuve.) C'est bien que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) L'étude se fait suivant le même principe. Pour $x = 0$, le terme général est nul, et pour $x > 0$, il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison de module inférieur strict à 1. On a bien convergence de $\sum_n f_n(x)$. De plus, si $x \in [a, +\infty[$, on a

$$|f_n(x)| \leq Me^{-na},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. C'est bien que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(b) Considérons le reste de rang n de la série : pour $x > 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} f_k(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}} e^{-(n+1)x}.$$

Si la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, c'est que $g(x)/x$ tend vers 0. Posons alors pour $x > 0$ $g_1(x) = \frac{g(x)}{1-e^{-x}}$. Puisque $1 - e^{-x} \sim_0 x$, on peut prolonger g_1 par continuité en 0 en posant $g_1(0) = 0$. Ceci définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$ et continue en 0. On se retrouve dans la situation de la question (1), et on a bien convergence uniforme du reste vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ou encore convergence uniforme de la série sur cet intervalle. Réciproquement supposons que $g(x)/x$ ne tend pas vers 0. Alors, g_1 non plus ne tend pas vers 0 en 0 et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in]0, \eta[\text{ tel que } |g_1(x)| > \varepsilon.$$

En prenant des nombres η de la forme $\eta = 1/n$, on obtient pour chaque $n \geq 1$ un réel x_n tel que

$$0 < x_n < \frac{1}{n} \text{ et } |g_1(x_n)| > \varepsilon.$$

Mais alors,

$$|R_n(x_n)| \geq \varepsilon e^{-(n+1)x_n} \geq \varepsilon e^{-(n+1)/n} \geq e^{-1}\varepsilon/2$$

dès que n est assez grand. Ceci nie la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a, b]$.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Correction.

1. On reconnait dans $f_n(x)$ une somme de Riemann pour f sur l'intervalle $[x, x+1]$, avec pas de $1/n$. Puisque f est continue, $(f_n(x))$ converge vers $\int_x^{x+1} f(t)dt$ pour tout $x \in [a, b]$ (et en fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$).
2. Soit $x \in [a, b]$. On a

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)dt\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \left|f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)\right| dt.\end{aligned}$$

Fixons ensuite $\varepsilon > 0$. On va utiliser l'uniforme continuité de f pour majorer ce qu'il y a à l'intérieur de l'intervalle. Remarquons que $x+\frac{i}{n}$ et t sont dans l'intervalle $[x, x+1] \subset [a, b+1]$. Par le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[a, b+1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tous $u, v \in [a, b+1]$,

$$|u - v| < \eta \implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Soit N tel que $\frac{1}{N} < \eta$. Pour $n \geq N$, pour $x \in [a, b]$, pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ et pour $t \in \left[x + \frac{i}{n}, x + \frac{i+1}{n}\right]$, on a

$$\left|x + \frac{i}{n} - t\right| \leq \frac{1}{n} < \eta.$$

On en déduit que

$$\left|f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)\right| < \varepsilon.$$

Finalement, il vient, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a, b]$,

$$\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \varepsilon = \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite (f_n) sur l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 12.

Soient I et J deux intervalles et (g_n) une suite de fonctions de I dans J qui converge uniformément sur I vers une fonction g. Soit $f \in C^0(J, \mathbb{R})$ et (h_n) la suite définie par $h_n = f \circ g_n$.

1. Montrer que si J est un segment, alors la suite (h_n) converge uniformément.
2. Que se passe-t-il si on ne suppose plus que J est un segment ?

Correction.

1. On va utiliser l'uniforme continuité de f sur le segment J (c'est le théorème de Heine). Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Puisque (g_n) converge uniformément, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\forall x \in I,\ |g_n(x) - g(x)| < \delta.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ |f(g_n(x)) - f(g(x))| < \varepsilon.$$

La suite (h_n) converge uniformément sur I vers $f \circ g$.

2. La propriété devient fausse si J n'est plus un segment. Prenons par exemple $g_n(x) = x + 1/n$ défini sur $\mathbb{R}$, et $f(x) = \exp(x)$. Alors (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto x$ et $(f \circ g_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f \circ g$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme. En effet,

$$f \circ g_n(x) - f \circ g(x) = \exp(x + 1/n) - \exp(x) = \exp x\big(\exp(1/n) - 1\big).$$

Ceci tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$. Autrement dit, on a

$$\|f \circ g_n - f \circ g\|_\infty = +\infty,$$

et donc la suite $(f \circ g_n)$ ne converge pas uniformément (elle ne pourrait converger uniformément que vers $f \circ g$ puisqu'elle converge simplement vers cette fonction).