Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°16

1. Exercices basiques

Exercice 1.

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 2.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
4. Quel est le sens de variation de S ?
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in -]t_0, t_0[\setminus\{0\}$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
6. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de S.

Exercice 3.

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que
$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$
3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 4.

Soit $C, a > 0$ et $\phi : [-a, a]$ une fonction continue vérifiant $|\phi(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in [-a, a]$. On souhaite étudier les fonctions $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante (notée $\mathcal{P}$) : f est continue, $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in [-a, a],\ f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est normalement convergente sur $[-a, a]$. On note h la somme de cette série.
2. Montrer que h vérifie $\mathcal{P}$.
3. Montrer que h est la seule fonction vérifiant $\mathcal{P}$.
4. On suppose de plus que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$. Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 5.

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S'.

Exercice 6.

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Exercice 7.

On considère la fonction $\mu(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.
   (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a
   $$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a
   $$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 8.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 9.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Exercice 10.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$,

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$

   (c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11.

Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 12.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\, t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) En déduire que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}.$$
   (c) Montrer que $f(t) = \arctan \dfrac{t\,\sin t}{1 - t\,\cos t}$ pour $t \in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k \sin k\,t$.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   (b) Montrer en écrivant $t^k \sin(k\,t) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin k\,t}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   (d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$.

Exercice 13.

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout k, $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.