Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 1.

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
2. Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n\cdot 2^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1}\left(\exp(1/n)-1\right)x^n$
4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a>0$ **5.** $\sum_n z^{n!}$ **6.** $\sum_n n^{\ln n} z^n$

Exercice 3.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 4.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Exercice 5.

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 6.

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière
$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$
   Démontrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire que $\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Exercice 7.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$. On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
   où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 8.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en

termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}$

Exercice 9.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 10.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$ **2.** $\dfrac{1}{a-\frac{x}{e^x}}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$ **4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$ **6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 11.

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 12.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 13.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en

termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Exercice 14.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Exercice 15.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Exercice 16.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Exercice 18.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $f_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et donner

une équation différentielle du premier ordre vérifié par f_α sur $\mathcal{D}$.

2. On définit la famille de polynômes (L_k) par $L_0 = 1$ et $L_k(X) = X(X+1)\cdots(X+k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

3. En déduire que, pour tous réels α et β, on a

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Exercice 19.

Soit $a > 0$ et $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!.$$

Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 20.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
2. $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
3. $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0,\pi[$, $h(0) = 0$.

Exercice 21.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 22.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

2. Exercices d'entraînement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 23.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. la suite (a_n) est périodique, et non identique nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 24.

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

1. $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ **2.** $a_n z^{2n}$ **3.** $a_n z^{n^2}$.

Exercice 25.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 26.

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 27.

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$
3. Application : on suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 28.

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a
$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$
2. En déduire que
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 29.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 30.

Soit f l'application définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.

3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 31.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Exercice 32.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha,\alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha,\alpha]$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du.$$

   On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha,\alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du$.
2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1}R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

3. Exercices d'approfondissement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 33.

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1,\rho) \leq R$.

Exercice 34.

Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers l.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$?
2. On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}f(x)$.

Exercice 35.

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n = o(1/n)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on note

$$A_n(x) = S(x) - \ell,\ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n,\ C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,
$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Exercice 36.

Soit f une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Démontrer que l'ensemble A des zéros de f (sur $\mathbb{C}$) est un fermé constitué de points isolés ?

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 37.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1}e^{-t^2}dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt$$
   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Exercice 38.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}e^{n^2 ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 39.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Exercice 40.

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que
$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 41.

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.