Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 1.

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
2. Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

Correction.

1. La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\pi^n}$ convient.
2. Si $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = 1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant $a_n = o(b_n)$.
3. C'est le même ! on a $|a_n\rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$ pour tout $\rho \geq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n\cdot 2^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \left(\exp(1/n)-1\right) x^n$
4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a>0$ **5.** $\sum_n z^{n!}$ **6.** $\sum_n n^{\ln n} z^n$

Correction.

On notera pour chaque exemple $a_n x^n$ le terme général de la série.

1. Posons $u_n = \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$. Alors

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)} \to \frac{\sqrt{2}|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$

   Ainsi, si $|z|^3 < \sqrt{2}$, la série de terme général $|u_n|$ est convergente d'après le critère de d'Alembert, alors qu'elle est divergente si $|z|^3 > \sqrt{2}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt[6]{2}$.
2. En effectuant un développement limité, on trouve que $a_n \sim \frac{1}{n}$ d'où $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$. La suite

$(|a_n z^n|)$ est donc bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Le rayon de convergence de la série est 1.

3. On a $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, donc $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$ et la suite $(|a_n z^n|)$ est bornée si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1.
4. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à $u_n = a^{\sqrt{n}}|z|^n$. On obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z| a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Or,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\big((1+1/n)^{1/2} - 1\big) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0.$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to |z| a^0 = |z|.$$

On en déduit que la série des modules converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

5. Pour $|z| < 1$, on remarque que $|z|^{n!} \leq |z|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|z| \geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.
6. Pour $u_n = n^{\ln n}|z|^n$, on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n/n}|z| = \exp\big((\ln n \times \ln n)/n\big)|z| \to |z|.$$

La série est donc convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence vaut 1.

Exercice 3.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Correction.

Soit $0 < r < \rho$. Par le lemme d'Abel, on sait que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|a_n r^n| \leq M.$$

Soit maintenant $R > 0$. Alors on a

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} = |a_n| r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}.$$

Par croissance comparée des suites puissances et factorielle, il existe $C > 0$ tel que $|(R/r)^n|/n! \leq C$. Il vient, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} \leq MC.$$

La suite $(a_n R^n)$ est bornée pour tout n, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

Exercice 4.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Correction.

Il suffit de remarquer que la suite $(a_n^\alpha r^n)$ est bornée si et seulement la suite $(a_n r^{n/\alpha})$ (obtenue en prenant la puissance $1/\alpha$ de la première) est bornée. Ainsi, si $r < \rho^\alpha$, alors $r^{1/\alpha} < \rho$ et donc les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ sont bornées. De même, si $r > \rho^\alpha$, de sorte que $r^{1/\alpha} > \rho$, alors les suite $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$ est égal à ρ^α.

Exercice 5.

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Correction.

Supposons d'abord que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors S est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que S est paire, et posons $T(x) = S(-x)$. Alors, on sait que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$T(-x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque S est paire, T et S coïncident sur $]-R, R[$. C'est donc que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = (-1)^n a_n$. Ceci impose que $a_n = 0$ dès que n est impair.

Exercice 6.

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière
$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur $[0,1]$.

(b) En déduire que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=0$.

Correction.

1. Puisque $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.
2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et $\pi/2$, la suite $\left(\sin(1/\sqrt{n})\right)$ est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en -1. En 1, la série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (on compare bien des séries à termes positifs).
3. (a) La série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$, qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier $N\geq 1$ tel que
$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq M+1.$$
De plus, cet entier N étant fixé, la fonction $h:x\mapsto\sum_{n=1}^{N}\sin(1/\sqrt{n})x^n$ est continue en 1. Ceci donne l'existence de $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1]$,
$$h(x)\geq h(1)-1.$$
Ceci est exactement le résultat voulu.

(b) Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout $M>0$, on peut trouver $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1[$,
$$f(x)\geq M.$$
Ceci signifie exactement que f tend vers $+\infty$ en 1^-.
4. (a) Il est clair que, pour tout $x\in[0,1]$, on a
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n\right|\leq\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|.$$
D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|\leq\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right|\leq\frac{C}{n^{3/2}}.$$
La série (numérique) de terme général $n^{-3/2}$ étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant g sur $[0,1]$.

(b) Un calcul aisé montre que
$$(1-x)f(x)=\sin(1)+g(x).$$
Or, g étant continue en 1, on trouve
$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)=\sin(1)+g(1)=\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]=0.$$

Exercice 7.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$. On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Correction.

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| \leq (l+1)|b_n|.$$
Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| r^n \leq (l+1)|b_n| r^n$$
et donc, si la suite $(|b_n| r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n| r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ étant en effet donné par
$$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n) \text{ est bornée }\}.$$
2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^{N} b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$. On a $P(1) = 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de P en 1.
3. Soit $M > 0$ et soient N, δ donnés par la question précédente. Alors, puisque b_n est positif pour tout n, on a, pour chaque $x \in]0, 1[$,
$$g(x) \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n.$$
En particulier, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a
$$g(x) \geq M.$$
Ceci prouve bien que g tend vers $+\infty$ en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n + \sum_{n=0}^{N} b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n$ et $c_n = b_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.

5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose f comme précédemment. D'une part, on a $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ et donc, multipliant par x^n et sommant pour $n = 0, \ldots, +\infty$, on déduit que

$$(l-\varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l+\varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque P est un polynôme, donc est continu en 1, et que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que f/g tend vers l en 1.

Exercice 8.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que

pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x\cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^n - 2e^x \\ &= x^2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n - 2e^x = (x^2-2)e^x.\end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n = 1$), on obtient

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n} = 1 - \exp(-x^2/2).$$

Exercice 9.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Correction.

1. Il est d'abord clair que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq S_n \leq n$. Donc, pour $\rho > 0$, on a

$$\rho^n \leq S_n \rho^n \leq n\rho^n.$$

Ainsi, si $\rho \in]0,1[$, la suite $(S_n\rho^n)$ est bornée (on peut même dire qu'elle tend vers 0), et si $\rho > 1$, la suite $(S_n\rho^n)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de S vaut 1.

2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :

$$\begin{aligned}
(1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n - S_{n-1})\, x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\ln(1-x).
\end{aligned}$$

3. Ayant reconnu le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, on en déduit que

$$F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 10.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de

convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Correction.

1. Il suffit de remplacer t par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$. On a donc
$$\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}.$$
La série converge si $|2x^2| < 1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Il suffit de factoriser par a au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$
Pour $|x/a| < 1 \iff |x| < |a|$, on obtient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$
Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.
3. On factorise par a :
$$\ln(x+a) = \ln\big(a(1+x/a)\big) = \ln(a) + \ln(1+x/a).$$
Pour $|x/a| < 1$, soit $|x| < a$, on en déduit
$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n a^n}.$$
Le rayon de convergence de la série entière obtenue est a.
4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$
La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x| < 1$, on a
$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
La série converge pour $|x| < 1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n \geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour $|x| > 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I=]-1/2,1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

(valable pour $|x|<1$)

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

(valable pour $|x|<1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc

$$(4+x^2)^{-3/2}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction $u\mapsto(1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall u\in]-1,1[,\ (1+u)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\ldots.(2n+1)}{2.4.6.\ldots.2n}u^n.$$

Il en résulte que pour tout x tel que $\frac{x^2}{4}\in]-1,1[$, on a

$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\ldots.(2n+1)}{2.4.6.\ldots.2n}\frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence $]-2,2[$.

Exercice 11.

Déterminer le développement en série entière de $x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Correction.

Notons f la fonction considérée. On pourrait écrire $f(x)=(1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus astucieux et beaucoup plus simple si

on pense à écrire (attention aux exposants !)

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$, il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Exercice 12.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Correction.

On décompose f en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x = 1/2$, on trouve $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b = 1$. Pour trouver a, on peut procéder par identification et on obtient $a = 1$. On développe en série entière chaque terme :

— Pour $x \neq 2$,

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x/2}.$$

Donc, pour $|x|/2 < 1$, on a

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

— Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

— Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver

terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

Exercice 13.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x \cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n &= \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

Même si cette dernière fonction semble ne pas être définie en 0, elle se prolonge bien sûr par continuité en ce point.

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!} x^n - 2e^x \\ &= x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n - 2e^x = (x^2-2)e^x.\end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n = 1$), on obtient

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} = 1 - \exp(-x^2/2).$$

Exercice 14.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n \to x^2$. Ainsi, si $|x| < 1$, la série est convergente et si $|x| > 1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1, 1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$xS(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et donc, pour $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

De plus, $S(0) = 1$.

2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^n = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{n-3} = x^3 \exp(x).$$

De même, on a

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!} x^n = x^2 \exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} x^n = x \exp(x).$$

On conclut que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x) \exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n.$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n x^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x \times \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Posons $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^2 x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1} \\ &= -1 + x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -1 + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x \neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Il est aussi clair que $S(0) = -1$.

Exercice 15.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\alpha \arcsin t) \\ f'(t) &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t) \\ f''(t) &= \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t). \end{aligned}$$

On combine d'abord f et f'' pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin t)$ puis on ajoute les termes en f' nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin t)$. Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$. La fonction $t \mapsto (1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n\big)t^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2-\alpha^2)a_n.$$

Puisque $a_0 = 1$ (car $y(0)=1$) et $a_1 = y'(0) = 0$, on en déduit que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p et que

$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right).$$

Réciproquement, la série entière

$$\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}$$

a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-t^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

$$f(x) = \sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}.$$

Exercice 16.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}}\exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2}\exp(\lambda \arcsin x). \end{aligned}$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R, R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)}a_n.$$

De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - x^2 \neq 0$ sur $]-1, 1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u = -t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.
2. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.
3. Par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x) = xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt + 1 = xf(x) + 1.$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = xy + 1$. Écrivons ensuite $f(x) =$

$\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$

et $a_0 = 1$. On en déduit finalement que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$. Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant x^{2n+1} qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

Exercice 18.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $f_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et donner une équation différentielle du premier ordre vérifié par f_α sur $\mathcal{D}$.
2. On définit la famille de polynômes (L_k) par $L_0 = 1$ et $L_k(X) = X(X+1)\cdots(X+k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{n!}.$$

3. En déduire que, pour tous réels α et β, on a

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que si α est un entier négatif ou nul, alors f_α est un polynôme et son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Sinon f_α est défini par $f_\alpha(x) = \exp(-\alpha \ln(1-x))$ qui est bien défini si $1-x > 0$, donc si $x < 1$. Dans ce cas, $\mathcal{D} =]-\infty, 1[$. Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1-x} \exp(-\alpha \ln(1-x)) = \frac{\alpha}{1-x} f_\alpha(x).$$

Ainsi, f_α vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathcal{D}$:

$$(1-x)y'(x) - \alpha y(x) = 0$$

(cette équation est également vérifiée en $x = 1$ si $1 \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire si $-\alpha \in \mathbb{N}$).

2. Posons $I =]-1,1[$. L'équation différentielle précédente se réécrit, sur I,

$$y'(x) - \frac{\alpha}{1-x}y(x) = 0.$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, elle admet une unique solution définie sur I vérifiant $y(0) = 1$: la fonction f_α. Considérons ensuite la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n$. Alors, puisque

$$\frac{\frac{L_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}}{\frac{L_n(\alpha)}{n!}} = \frac{n+\alpha}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 1,$$

la règle de d'Alembert nous dit que cette série entière est de rayon de convergence 1. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n \\ &= L_1(\alpha) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!} - \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}\right)x^n.\end{aligned}$$

Or, $L_1(\alpha) = \alpha = \alpha L_0(\alpha)$ et

$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!} - \frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!} &= \frac{L_{n+1}(\alpha) - nL_n(\alpha)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n) - n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n-n)}{n!} \\ &= \alpha L_n(\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)S'(x) = \alpha S(x).$$

Puisque $S(0) = L_0(\alpha) = 1$, l'unicité dans le théorème de Cauchy nous dit que $S = f_\alpha$ sur $]-1,1[$, ce qui est le résultat demandé.

3. Rappelons l'énoncé du théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries entières : si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x_n$ sont deux séries entières, alors leur produit de Cauchy est la série entière $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$. De plus, si A et B ont pour rayon de convergence respectifs R_A et R_B, alors le rayon de convergence de C vérifie $R_C \geq \min(R_A, R_B)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \min(R_A, R_B)$, on a

$$C(x) = A(x)B(x).$$

Appliquons ce résultat avec $A(x) = f_\alpha(x)$ et $B(x) = f_\beta(x)$, dont la série produit est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta)}{k!(n-k)!} \right) x^n.$$

Tenant compte du fait que $f_\alpha \cdot f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ et que

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \frac{1}{n!},$$

on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta)}{n!} \right) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient finalement que pour tout $n \geq 0$,

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

Exercice 19.

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!.$$

Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Correction.

Prenons $x \in [-a, a]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \leq C|xA|^{n+1}.$$

Soit $r = \min(a, 1/A)$. Alors si $|x| < r$, on a $|xA| < 1$ et donc $|xA|^{n+1} \to 0$. On en déduit que la série de Taylor de f converge vers f sur l'intervalle $]-r, r[$, et donc f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 20.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
2. $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
3. $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

Correction.

1. Pour $x \neq 0$, on a, d'après le développement en série entière de sin,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$
Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 1. Ainsi, f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence $+\infty$. f est donc de classe C^∞.
2. Pour $x \geq 0$, on a
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Pour $x < 0$, on a :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Ainsi, g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$: elle est donc de classe C^∞.
3. Pour $x \neq 0$, on a
$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$
On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, en mettant en facteur le premier terme. On trouve
$$h(x) = \frac{x^2 \times \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$
Posant $u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$ et $v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, on voit que pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Or, u et v sont de classe C^∞ (ce sont des sommes de série entière), v ne s'annule pas en 0, et de plus $u(0)/v(0) = 0 = h(0)$. Ainsi, h définit bien une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas en 0.

Exercice 21.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} \to |x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x = 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x = -1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1, 1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1, 1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$$
et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1, 1]$. Comme chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1, 1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x| < 1$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n} = \ln(1 + x^2).$$
En effet, pour $x \in]-1, 1[$, on a $0 \leq x^2 < 1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1 + u)$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1 + t^2)dt \\ &= \left[t \ln(1 + t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1 + t^2}dt \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}dt \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2\left[t - \arctan(t)\right]_0^x \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x. \end{aligned}$$
4. L'égalité $f(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1, 1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0, 1]$ tout entier. On conclut que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n + 1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 22.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Correction.

1. Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque
$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
on a aussi convergence en 1 et -1. L'intervalle de convergence est donc $[-1,1]$.
2. Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geq 2$, on a
$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.
3. f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a
$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x).$$
Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$
La constante C se calcule en remarquant que $f(0) = 0 = C$.
4. L'égalité précédente est, a priori, vraie sur $]-1,1[$, mais puisque f et $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ sont continues en 1, elle est aussi vraie en 1. On en déduit
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$

2. Exercices d'entraînement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 23.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. la suite (a_n) est périodique, et non identique nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Correction.

1. Puisque la suite (a_n) est convergente, elle est bornée et donc la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1. De plus, au voisinage de l'infini, on a $a_n r^n \sim \ell r^n$. Si $r > 1$, ceci tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence de la série entière est donc exactement égal à 1.
2. Puisque la suite (a_n) est périodique, elle est bornée et un raisonnement identique à celui de la question précédente donne que le rayon de convergence est au moins égal à 1. De plus, puisque la suite (a_n) est périodique et non identiquement nulle, elle ne converge par vers 0. Ainsi, la série $\sum_n a_n 1^n$ est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1.
3. Il suffit de remarquer que $1 \leq a_n \leq n$, ce qui entraine
$$|x|^n \leq |a_n x^n| \leq n|x|^n.$$
Ainsi, pour $|x| < 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ converge, et pour $|x| > 1$, elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.
4. La suite (a_n) est une suite qui prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 9\}$ donc elle est bornée. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, (a_n) prend une infinité de fois une valeur dans $\{1, \dots, 9\}$. En particulier, (a_n) ne tend pas vers 0. Raisonnant comme ci-dessus, on trouve que le rayon de convergence vaut exactement 1.

Exercice 24.

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

1. $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ **2.** $a_n z^{2n}$ **3.** $a_n z^{n^2}$.

Correction.

1. Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$. Puisque $|a_n| e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$, on a $R_1 \leq R$. Soit maintenant $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors, pour tout $\rho \in [0, r[$, on a
$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$
et comme $e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$ est bornée. On en déduit que $R \leq R_1$ et donc finalement que $R = R_1$.
2. Il est clair que $(a_n r^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (r^2)^n)$ est bornée (c'est la même

suite écrire de deux façons différentes). Le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{2n}$ est donc égal à $\sqrt{R}$.

3. Supposons d'abord $R > 0$ et $R < +\infty$. On va alors prouver que le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. En effet, soit r tel que $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout $\rho < 1$, on a $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ et cette quantité est bornée car $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0 (on a choisi $\rho < 1$). Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est supérieur ou égal à 1. De façon similaire, on prouve que, si r est tel que $a_n r^n$ n'est pas bornée, alors pour tout $\rho > 1$, on a $a_n \rho^{n^2}$ qui n'est pas borné. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. Lorsque $R = +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ sera élément de $[1, +\infty]$, mais toutes les valeurs peuvent être prises : <ul class="rien">
4. Si $a_n = 1/n!$, alors le rayon vaut 1.
5. Si $a_n = 1/n!^2$, alors le rayon vaut $+\infty$.
6. Si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, avec $\lambda > 1$, le rayon de convergence vaut λ. De même, si $R = 0$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ peut être n'importe quel réel dans $[0, 1]$.

Exercice 25.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Correction.

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2} \sim_0 \frac{t^4}{t^2} = t^2$$
et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable car 2>1. La fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}.$$
Par intégration de cette série entière, on trouve
$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} dt = \int_0^x \frac{1-e^{-t^4}}{t^2} dt.$$
Ainsi, f admet une limite en $+\infty$ égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^4}}{t^2} dt$.

Exercice 26.

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Correction.

1. Pour $a_n = (-1)^n$, on a $S(x) = \frac{1}{1+x}$ qui tend vers $1/2$ si x tend vers 1^-, alors que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. Remarquons d'abord que S est croissante (puisque chaque $x \mapsto a_n x^n$ est croissante). Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a $S(x) \leq \ell$. Mais alors, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on a encore

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq \ell.$$

Si on fait tendre x vers 1^-, on obtient que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$$

Les sommes partielles de la série $\sum_n a_n$, qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$. Fixons ensuite $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1[$ tel que $S(x) \geq \ell - \varepsilon$. Il vient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \ell - \varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

Exercice 27.

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

3. Application : on suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Correction.

1. Puisque $r < R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum_n |a_n| r^n$ est convergente. Puisque $|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n| r^n$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0, 2\pi]$.
2. On a
$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$
Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = \sum_n a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$
La dernière intégrale est égale à 0 si $k \neq n$, et à 2π sinon. On en conclut que
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi a_k r^k.$$
3. Pour $k \geq 1$, on a
$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta.$$
Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on a
$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$
Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_k = 0$ pour $k \geq 1$, ce qui entraîne que f est constante.

Exercice 28.

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a
$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x - 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$
2. En déduire que
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Correction.

1. On commence par couper la somme en n et par remarquer que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme $a_k = R_{k-1} - R_k$ (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour $m \geq n+1$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n+1}^{m} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_m x^{m+1}.$$

Puisque (R_p) tend vers 0, on peut faire tendre m vers ∞ et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n x^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. On va d'abord fixer n pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de x dans $[0,1[$, puis on va faire tendre x vers 1. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq n$, on a $|R_k| \leq \varepsilon$. On en déduit, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\left| (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k \right| \leq \varepsilon |x-1| \times \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k \leq \varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de n,

$$\left| R_n(x^{n+1} - 1) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Cette valeur de n étant fixée, la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)$ est continue en 0, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

Exercice 29.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n \to x^2$. Ainsi, si $|x| < 1$, la série est convergente et si $|x| > 1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$
Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
et donc, pour $x \neq 0$,
$$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
De plus, $S(0) = 1$.
2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3} = x^3\exp(x).$$
De même, on a
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2\exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!}x^n = x\exp(x).$$
On conclut que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n = (x^3+3x^2+x)\exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n.$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n x^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x \times \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Posons $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^2 x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1} \\ &= -1 + x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -1 + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x \neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Il est aussi clair que $S(0) = -1$.

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 30.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.

3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x). \end{aligned}$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $t \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 31.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.

3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u = -t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.
2. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.
3. Par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x) = xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-x^2/2}dt + 1 = xf(x) + 1.$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = xy + 1$. Écrivons ensuite $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$

et $a_0 = 1$. On en déduit finalement que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant x^{2n+1} qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

Exercice 32.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du.$$

On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du$.

2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1}R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Correction.

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. On sait que f^{n+1} est croissante sur I puisque $f^{(n+2)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $u \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$. Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.
3. Il s'agit de démontrer que $R_n(x)$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite $(R_n(\alpha))$ est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour $x = \alpha$, et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$. Et donc $(R_n(x))$ tend bien vers 0.

3. Exercices d'approfondissement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 33.

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1, \rho) \leq R$.

Correction.

1. Remarquons que $a_n = S_n - S_{n-1}$ et donc que $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$. Ainsi, $\sum_n a_n z^n$ est la différence de deux séries entières de rayon de convergence R, son rayon de convergence ρ vérifie $\rho \geq R$.
2. La série $\sum_n S_n z^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n z^n$. Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif ρ et 1. On en déduit que le rayon de convergence R de la série $\sum_n S_n z^n$ vérifie $R \geq \inf(1, \rho)$.

Exercice 34.

Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers l.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
2. On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} f(x)$.

Correction.

1. Puisque la suite (a_n) est convergente, elle est bornée, disons par $M > 0$. Mais, par application du critère de d'Alembert, la série $\sum_n Mx^n/n!$ est convergente pour tout réel x. Le rayon de convergence de la série est donc égal à $+\infty$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que, pour $n \geq N$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + l e^x.\end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{N}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n := f_1(x) + f_2(x).$$

Puisque f_1 est un polynôme, on a $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} f_1(x) = 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour $x \geq x_0$,

$$e^{-x} |f_1(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, on a, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}e^{-x} |f_2(x)| &\leq \sum_{N}^{+\infty} \frac{|a_n - l|}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \varepsilon e^{-x} e^x = \varepsilon.\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité triangulaire on trouve, pour tout $x \geq x_0$,

$$|e^{-x} f(x) - l| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, $e^{-x} f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 35.

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n = o(1/n)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on note

$$A_n(x) = S(x) - \ell, \ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1 - x^n) a_n, \ C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1 - x)}.$$

3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Correction.

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.
2. Soit N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq \varepsilon/n$. Pour $N \geq N_0$, il vient
$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir $x = 1 - \frac{1}{N}$, de sorte à avoir une grande valeur de x qui garantisse néanmoins que $|C_N(x)| \leq \varepsilon$. Majorons ensuite les autres termes. Pour $A_N(x)$, c'est facile. Il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$,
$$|A_N(x)| = \left| S\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \ell \right| \leq \varepsilon.$$
D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t^n$, on a
$$|1 - x^n| \leq n(1-x) \leq \frac{n}{N}.$$
Il vient
$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n a_n.$$
D'après le théorème de Cesaro, puisque (na_n) tend vers 0, on sait que $|B_N(1-1/N)|$ tend vers 0, et donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_2$,
$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$
Finalement, pour tout $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on trouve
$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon.$$
Ceci prouve la convergence de la série $\sum_n a_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 36.

Soit f une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Démontrer que l'ensemble A des zéros de f (sur $\mathbb{C}$) est un fermé constitué de points isolés ?

Correction.

On règle d'abord le cas où f est identiquement nulle. Dans le cas contraire, prouvons d'abord que A est fermé : si (z_n) est une suite de zéros de f, et si $z_n \to z$, alors par continuité de f en z on a aussi $f(z) = 0$, et donc $z \in A$. En outre, A est constitué uniquement de points isolés, c'est-à-dire que si $z_0 \in A$, il existe un voisinage V de z_0 tel que $V \cap A = \varnothing$. En effet, puisque le rayon de convergence du développement en série entière de f vaut $+\infty$, f est aussi développable en série entière au voisinage de z_0, avec un développement ayant un rayon de convergence égal à $+\infty$. Ce développement s'écrit :

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

où on peut supposer $a_n \neq 0$ (f est non identiquement nulle). On a alors :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

où g est une fonction continue vérifiant $g(z_0) = a_n \neq 0$. Par continuité, g, donc f, ne s'annule pas dans un voisinage de z_0, sauf en z_0.

b. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 37.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^{2k+1} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $t^{2k+1} e^{-t^2} = o(t^{-2})$. Ceci justifie la convergence de $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt$. De plus, en réalisant une intégration par parties (on intègre te^{-t^2} et on dérive t^{2k}), on a pour $k \geq 1$

$$I_k = \left[\frac{-1}{2} t^{2k+1} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{2k-1} e^{-t^2} dt = kI_{k-1}.$$

   Comme de plus

$$I_0 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

   on en déduit que $I_k = \frac{k!}{2}$.
2. (a) Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence

égal à $+\infty$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1},$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt.$$

On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}.$$

Or, posons $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \to 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_k u_k$ converge, il en est donc de même de la série $\sum_k \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt$. Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons $g(x,t) = e^{-t^2}\sin(tx)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. De plus, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\cos(tx)$$

ce qui implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leq te^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de x) est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(tx)dt.$$

Pour former une équation différentielle vérifiée par f, on va intégrer par parties, en intégrant te^{-t^2} et en dérivant $\cos(tx)$. Il vient

$$f'(x) = \left[\frac{-1}{2} e^{-t^2}\cos(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; d'après le théorème de Cauchy, f est la solution

de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$. Cherchons maintenant une solution $y(x) = \sum_{k\geq 1} a_k x^k$ de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$. On a

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 1$$

soit

$$2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} ((k+2)a_{k+2} + a_k)\, x^{k+1} = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1 = \frac{1}{2}$ puis que $a_{k+2} = \frac{-a_k}{k+2}$. Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

Exercice 38.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Correction.

1. Posons $u_n(x) = e^{-n} e^{n^2 ix}$. Alors u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$, on a
$$u_n^{(k)}(x) = (in^2)^k e^{-n} e^{n^2 ix}.$$
Puisque $n^{2k} e^{-n} = O(n^{-2})$, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|u_n^{(k)}(x)| \leq M n^{-2}.$$
La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées k-ièmes $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, $f = \sum_n u_n$ est de classe C^∞.
2. D'après le calcul précédent, on a $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n\geq 0} n^{2k} e^{-n} \geq k^{2k} e^{-k}$. Or, $k^k \geq k!$, et donc
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \geq \frac{k^k}{k!} k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}.$$
3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide I centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, f serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$
Mais pour $x \neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,
$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \geq k^k (x/e)^k \to +\infty$$

(on peut aussi vérifier la non-convergence par le critère de d'Alembert). Ainsi, f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 39.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Correction.

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a
$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 1$$
avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. La suite (b_n) vérifie donc la relation de récurrence
$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & \frac{1}{a_0} \\ b_n & = & \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \end{array}\right.$$
2. Soit $R > 0$ tel que $|a_n| \leq R^n$ pour $n \geq 1$, et on pose $C > 0$ suffisamment grand pour que
$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|$$
On va prouver par récurrence sur n que $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors
$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} \frac{R^k}{C^k}\frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de (b_n), on a $f(z)g(z) = 1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g = 1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

Exercice 40.

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \dots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Correction.

1. Puisque $\{1, 2, 3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions (1 2), (1 3), (2 3).
   - les 2 cycles (1 2 3) et (1 3 2).

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
   $$D_{3,0} = 2,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant k point fixes, alors la famille $A_0, \dots, A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   - $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   - ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n - k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z| < 1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x| < 1$. De plus, on a
   $$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{n!}.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = 1.$$

On obtient

$$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$, on tire

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient bien $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

7. La probabilité recherchée est $p_n = d_n/n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1) = 1/e$.

Exercice 41.

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Correction.

1. Considérons s une involution de $\{1, \ldots, n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $\{1, \ldots, n\}$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $\{1, \ldots, n\}$. Dans ce cas, $s(k) = n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Une involution est nécessaire bijective. Donc $I_n \leq n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1.

3. On a
$$(1+x)S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}x^n + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_n - nI_{n-1}}{n!}x^n.$$
En utilisant le résultat de la première question, on obtient
$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n+1}}{n!}x^n = S'(x).$$

4. La résolution de l'équation différentielle donne
$$S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x e^{\frac{x^2}{2}}.$$
On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve
$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!} \text{ et } I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$