Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°18

1. Endomorphismes des espaces euclidiens

a. Adjoint

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

Correction.

D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que

$$\ker(u) = \ker(u^* \circ u).$$

Déjà, il est clair que $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$. Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $u^*(u(x)) = 0$. En particulier, on a

$$\langle u^*(u(x)), x\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 = 0.$$

Ainsi, $x \in \ker u$ et on a bien l'égalité souhaitée.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On rappelle que $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$.

1. On suppose que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\| = \rho(f)$.
2. On ne suppose plus que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\|^2 = \|f^* f\|$. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\rho(f^* f)}$.

Correction.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres pour f. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et donc
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i^2 \leq \rho(f)^2 \|x\|^2,$$
ce qui prouve que $\|f\| \leq \rho(f)$. D'autre part, il existe k tel que $\rho(f) = |\lambda_k|$. On a alors $\|f(e_k)\| = |\lambda_k| = \rho(f)$, et comme $\|e_k\| = 1$, on a $\rho(f) \leq \|f\|$.
2. Remarquons d'abord que $f^* f$ est autoadjoint (car $(f^* f)^* = f^* f$). Ceci montre que $\rho(f^* f) = \|f^* f\|$. Il reste à prouver que $\|f\| = \|f^* f\|^{1/2}$. Mais, on a $\|f^*\| = \|f\|$, et
$$\|f^* \circ f\| \leq \|f^*\| \cdot \|f\| = \|f\|^2.$$

D'autre part, si $x \in E$,

$$\|f(x)\|^2 = (f^*(f(x)), x) \leq \|f^*(f(x))\| \cdot \|x\| \leq \|f^* f\| \cdot \|x\|^2,$$

ce qui prouve que $\|f\|^2 \leq \|f^* f\|$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si (e_i) et (f_k) sont deux bases orthonormées de E, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u^*(f_k)\|^2.$$

2. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$ est indépendant de la base orthonormée choisie.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Correction.

1. On écrit

$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u(e_i), f_k \rangle|^2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |\langle u(e_i), f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, u^*(f_k) \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \|u^*(f_k)\|^2. \end{aligned}$$

2. Si (e_i) et (e'_i) sont deux bases orthonormées, alors on aura toujours, (f_i) désignant une base orthonormée fixe

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(e'_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u^*(f_k)\|^2.$$

La quantité est donc indépendante de la base orthonormée choisie.
3. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Par un calcul direct, on a aussi

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

de sorte que

$$\|u(e_1)\|^2 + \cdots + \|u(e_n)\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2.$$

Mais, u est un endomorphisme autoadjoint, il est diagonalisable dans une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que $u(f_i) = \lambda_i f_i$. On a alors

$$\|u(f_1)\|^2 + \cdots + \|u(f_n)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

D'après le résultat de la question précédente, ces deux quantités sont égales !

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que f^* a la même propriété.
2. Montrer que $f - Id_E$ et $f^* - Id_E$ ont le même noyau.
3. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(f - Id_E)$.
4. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$.

Correction.

1. On a :

$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x), f^*(x)) = (f(f^*(x)), x) \leq \|f(f^*(x))\|\|x\| \leq \|f^*(x)\|\|x\|,$$

où on a utilisé successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la propriété vérifiée par f pour $y = f^*(x)$. En simplifiant par $\|f^*(x)\|$, on obtient le résultat demandé.

2. Prenons $x \in \ker(f - Id_E)$. On a :

$$\|f^*(x) - x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, f^*(x)).$$

Or, $(x, f^*(x)) = (f(x), x) = (x, x) = \|x\|^2$. On en déduit que :

$$\|f^*(x) - x\|^2 \leq \|f^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0.$$

Ainsi, $f^*(x) - x = 0$, et $x \in \ker(f^* - Id_E)$. On a donc prouvé que $\ker(f - Id_E) \subset \ker(f^* - Id_E)$. Puisque $(f^*)^* = f$, et que f^* vérifie la même propriété que f, on en déduit que l'inclusion inverse est aussi vérifiée.

3. Remarquons que $\ker(f - Id_E) = \ker(f^* - id_E^*) = (\operatorname{Im}(f - Id_E))^{\perp}$, ce qui prouve que les deux sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.

4. D'après la question précédente, $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(f - Id_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(f - Id_E)$. Pour x_1, on a $f(x_1) = x_1$, et par suite $f^k(x_1) = x_1$. On en déduit que $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_1) = x_1$. Pour x_2, x_2 s'écrit $x_2 = f(y) - y$. On a $f(x_2) = f^2(y) - f(y)$, et donc $x_2 + f(x_2) = f^2(y) - y$. Par récurrence, on prouve que $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = \frac{f^p(y) - y}{p}$. Mais $\|f^p(y)\| \leq \|y\|$, et donc $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = 0$. En conclusion, on en déduit que $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x) = x_1$, c'est-à-dire que cette limite est le projeté orthogonal de x sur $\ker(f - Id_E)$.

b. Endomorphismes autoadjoints / Matrices symétriques réelles

Exercice 5.

Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $P^T AP$ soit diagonale.

Correction.

La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Le calcul du polynôme caractéristique nous dit que -3 est valeur propre simple, et que 3 est valeur propre double. Cherchons d'abord le sous-espace propre associé à 3. La résolution de l'équation $AX = 3X$ montre que l'espace propre associé est le plan vectoriel $x+y+z = 0$. Une base de cet espace est donnée par le vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$. L'orthonormalisation de cette base donne la base orthonormalisée $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$. Pour l'espace propre associé à -3, il y a possibilité d'aller plus vite. Comme on a affaire à une matrice symétrique, les espaces propres sont orthogonaux. Ici, l'espace propre associé à -3 ne peut-être que l'orthogonal du plan $x + y + z = 0$. Un vecteur normal à ce plan étant le vecteur $(1, 1, 1)$, une base orthonormée de l'espace propre associée à -3 est le vecteur $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Finalement, on trouve qu'une matrice P qui convient est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Correction.

La matrice est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée. Le calcul de son polynôme caractéristique montre que ses valeurs propres sont 3, 6 et 9. Une base de vecteurs propres associés est $(2, 2, -1), (-1, 2, 2), (2, -1, 2)$. Ses vecteurs sont déjà orthogonaux (cela aurait le cas quelque soient les vecteurs propres choisis, car les espaces propres sont de dimension 1, et ils sont orthogonaux deux à deux). Pour obtenir une base orthonormale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme. Une base orthonormale de vecteurs propres est donc :

$$(2/3, 2/3, -1/3), (-1/3, 2/3, 2/3), (2/3, -1/3, 2/3).$$

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel euclien, et soient u, v deux endomorphismes autoadjoints de E.

1. Démontrer que $\ker(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Correction.

1. On va d'abord démontrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux, donc en somme directe orthogonale. Soit $x \in \ker(u)$ et soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $y = u(z)$. On en déduit alors, en utilisant la symétrie de u,
$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = \langle u(x), z\rangle = 0.$$
En utilisant le théorème du rang, on conclut alors que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.
2. Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement le fait que u et v sont autoadjoints, on en déduit que
$$\begin{aligned}\langle u \circ v(x), y\rangle &= \langle v(x), u(y)\rangle \\ &= \langle x, v \circ u(y)\rangle.\end{aligned}$$
On en déduit que si $u \circ v = v \circ u$, alors $u \circ v$ est autoadjoint. Réciproquement, si $u \circ v$ est autoadjoint, alors le calcul précédent montre que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$\langle x, v \circ u(y)\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle \implies \langle x, u \circ v(y) - v \circ u(y)\rangle = 0.$$
Ainsi, le vecteur $u \circ v(y) - v \circ u(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace : il est donc nul, et comme ceci est vrai pour tout $y \in E$, on a $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 8.

Déterminer les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

Correction.

Soit u un tel endomorphisme, et soit λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur propre associé, on a $\|u(x)\| = \|x\|$ et $\|u(x)\| = |\lambda|\|x\|$. On en déduit que $\lambda = \pm 1$. On a donc $\ker(u - Id) \oplus^{\perp} \ker(u + Id) = E$ et donc u est une symétrie orthogonale. Réciproquement, toute symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint et orthogonal.

Exercice 9.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et λ un réel.

1. Démontrer que
$$f(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme autoadjoint de E.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.

Correction.

1. Soient $x, y \in E$. Alors on a d'une part
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$$
et d'autre part
$$\langle x, f(y)\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle.$$
On conclut par symétrie du produit scalaire que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
2. D'abord, si $\lambda = 0$, f est l'identité : 1 est valeur propre et tous les vecteurs de l'espace sont des vecteurs propres. On suppose donc que $\lambda \neq 0$, et soit μ une valeur propre de f de vecteur propre associé $x \neq 0$. Alors on a
$$f(x) = \mu x \iff (1-\mu)x = \lambda\langle x, a\rangle a.$$
Si $\mu = 1$, alors ceci est équivalent à $\langle x, a\rangle = 0$. Ainsi, 1 est valeur propre de f, et l'espace propre associé est $\mathrm{vect}(a)^\perp$. Si $\mu \neq 1$, on voit que x et a doivent être proportionnels. Or, on a
$$f(a) = (1+\lambda)a.$$
Ainsi, $1+\lambda$ est valeur propre de f, et son espace propre contient $\mathrm{vect}(a)$. Mais puisque $\mathrm{vect}(a)$ et $\mathrm{vect}(a)^\perp$ sont supplémentaires, on a déterminé complètement les sous-espaces propres de f.

Exercice 10.

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de u ?

Correction.

Soit λ une valeur propre de u, et x un vecteur propre associé. Alors on a d'une part
$$\langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$
et d'autre part, par hypothèse,
$$\langle u(x), x\rangle = 0.$$
Toutes les valeurs propres de u sont donc nulles. Comme u est diagonalisable, on en déduit que $u = 0$.

Exercice 11.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut A ?

Correction.

Soit λ une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé. Alors on a $A^pX = \lambda^p X$ mais aussi $A^pX = 0$. Ainsi, on doit avoir $\lambda^p = 0$, soit encore $\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de A doivent être nulles. Mais comme A est diagonalisable, il est clair que ceci entraîne que $A = 0$. Réciproquement, la matrice nulle vérifie bien ceci !

Exercice 12.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Est-ce que la matrice $A + iI_n$ est inversible ?

Correction.

Il suffit de prouver que 0 n'est pas une valeur propre de $A + iI_n$. Mais A étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et admet donc uniquement des valeurs propres réelles, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (éventuellement répétées plusieurs fois si la valeur propre est multiple). Donc les valeurs propres de $A + iI_n$ sont $\lambda_1 + i, \ldots, \lambda_n + i$. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de $A + iI_n$ et cette matrice est inversible.

Exercice 13.

Soit $u : E \to E$ tel que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Démontrer que u est linéaire.

Correction.

Soient $x, y \in E$. Pour démontrer que $u(x+y) = u(x) + u(y)$, il suffit de démontrer que le vecteur $u(x+y) - u(x) - u(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace. Prenons donc $z \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\langle u(x+y) - u(x) - u(y), z\rangle &= \langle u(x+y), z\rangle - \langle u(x), z\rangle - \langle u(y), z\rangle \\
&= \langle x+y, u(z)\rangle - \langle x, u(z)\rangle - \langle y, u(z)\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Avec une méthode tout à fait similaire, on prouve que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc u est bien linéaire.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit u un endomorphisme autoadjoint de E et soient (e_i), (f_j) deux bases orthonormales de E.

1. Démontrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2.$$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs

propres. Démontrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Correction.

1. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i), f_j \rangle^2.$$

On en déduit alors, en utilisant la symétrie de u,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i), f_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(f_j) \rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \|u(f_j)\|^2. \end{aligned}$$

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A sur $\mathbb{R}^n$. Alors, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$\|u(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

et donc

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2.$$

Si maintenant $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u, avec $u(f_i) = \lambda_i f_i$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate de la question précédente.

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E et on considère l'endomorphisme f de E défini par

$$f(x) = \langle u, x \rangle u - \langle v, x \rangle v.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Déterminer les valeurs propres de f ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

Correction.

1. Pour $x, y \in E$, on a
$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle \langle u, x\rangle u - \langle v, x\rangle v, y\rangle \\ &= \langle u, x\rangle\langle u, y\rangle - \langle v, x\rangle\langle v, y\rangle.\end{aligned}$$
D'autre part, on a aussi
$$\begin{aligned}\langle x, f(y)\rangle &= \langle x, \langle u, y\rangle u - \langle v, y\rangle v\rangle \\ &= \langle x, u\rangle\langle u, y\rangle - \langle x, v\rangle\langle v, y\rangle.\end{aligned}$$
En utilisant la symétrie du produit scalaire, on obtient bien $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ et donc f est un endomorphisme autoadjoint.
2. Puisque (u, v) est une famille libre, $f(x) = 0$ si et seulement si $\langle u, x\rangle = 0$ et $\langle v, x\rangle = 0$. Notons P le plan engendré par les vecteurs u et v. On a prouvé que $x \in \ker(f)$ si et seulement si x est orthogonal au plan P, autrement dit $\ker(f) = P^\perp$. Ainsi, puisque $\dim(P) = 2$, on a $\dim(\ker(f)) = n-2$. Par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $n - \dim(\ker(f)) = 2$. De plus, il est clair que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans P qui est lui aussi de dimension 2. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(f) = P$.
3. On sait déjà que 0 est valeur propre de f et que l'espace propre associé est de dimension $n-2$. D'autre part, dans une base de E constituée par une base de $\ker(f)$ et de (u, v), la matrice de f s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \\ 0 & \dots & 0 & -\langle u, v\rangle & -\|v\|^2 \end{pmatrix}.$$
On calcule le polynôme caractéristique de f en utilisant cette matrice et on trouve
$$\begin{aligned}\chi_f(X) &= (-X)^{n-2}\left(\|u\|^2 - X\right)\left(-\|v\|^2 - X\right) + \langle u, v\rangle^2 \\ &= (-X)^{n-2}\left(X^2 + \left(\|v\|^2 - \|u\|^2\right)X + \langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right).\end{aligned}$$
Le discriminant du polynôme de degré 2 qui apparait vaut
$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\|v\|^2 - \|u\|^2\right)^2 - 4\langle u, v\rangle^2 + 4\|u\|^2\|v\|^2 \\ &= \left(\|v\|^2 + \|u\|^2\right)^2 - 4\langle u, v\rangle^2 \\ &= \left(\|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle\right)\left(\|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle\right) \\ &= \|u - v\|^2\|u + v\|^2.\end{aligned}$$
Comme (u, v) est libre, on n'a pas $u = v$ ou $u = -v$ et donc $\Delta > 0$. Le polynôme χ_f admet donc deux racines distinctes non nulles qui sont
$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2 \pm \|u - v\|\|u + v\|\right).$$
Ces deux racines sont les deux dernières valeurs propres de f, et les espaces propres associés sont de dimension 1.

Exercice 16.

Soit H la matrice $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. Exprimer $\langle HX, X\rangle$ à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2}dx$).
2. En déduire que la matrice H est définie positive.

Correction.

1. Rappelons la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\langle AX, X\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Ici, et utilisant l'indication, on a

$$\langle HX, X\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j \int_0^1 x^{i+j-2}dx.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle HX, X\rangle &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_jx^{i+j-2}dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_ix^{i-1}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

2. De la formule précédente, on déduit immédiatement que H est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet,si $\langle HX, X\rangle = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall x \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} x_ix^{i-1} = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H est bien définie positive.

Exercice 17.

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Correction.

Soit A une matrice symétrique quelconque. Il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^T$, où D est une matrice diagonale, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $M > \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$. On considère les deux matrices suivantes :

$$B = P\text{diag}(M + \lambda_1, \dots, M + \lambda_n)P^T \text{ et } C = P\text{diag}(M, \dots, M)P^T.$$

Alors B et C sont deux matrices symétriques définies positives, et $A = B - C$. L'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives contient donc toutes les matrices symétriques. Comme l'ensemble des matrices symétriques est un espace vectoriel, on en déduit que c'est le sous-espace vectoriel recherché.

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme autoadjoint $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient à $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   (a) Montrer que $wu = uw$.
   (b) En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   (c) Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est autoadjoint positif, puis diagonaliser w_i.
   (d) En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in GL(E)$.
   (a) Montrer que $f \circ f^* \in S^{++}(E)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle décomposition polaire de f.

Correction.

1. Puisque u est autoadjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prenant $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a
$$(u(x), x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$
Si toutes les valeurs propres sont positives, on en déduit que cette quantité est positive. D'autre part, s'il existe une valeur propre strictement négative, par exemple λ_1, alors $(u(e_1), e_1) = \lambda_1 < 0$, et u n'est pas positif. Pour que u soit défini positif, il est nécessaire et suffisant que toutes les valeurs propres de u soient strictement positives. Le raisonnement

est identique.

2. D'après le théorème spectral, les E_i sont en somme directe orthogonale. Ainsi, si $x \in E_i$, on a $v_j(x) = 0$ si $j \neq i$ et $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$. Ainsi, $v(x) = v_1(x) + \cdots + v_n(x) = \sqrt{\lambda_i}x$, et $v^2(x) = \lambda_i x$. Puisque $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, la relation est vraie sur E tout entier par recollement. D'autre part, v est autoadjoint positif, car chacun des v_i est autoadjoint positif.
3. (a) On a : $w \circ u = u^2 \circ u = u^3 = u \circ u^2 = u \circ w$.
   (b) Il est bien connu que si deux endomorphismes commutent, le noyau de tout polynôme en l'un est stable par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par w.
   (c) w_i est un endomorphisme autoadjoint positif, car c'est la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme positif. w_i est donc diagonalisable dans une base orthonormale. En outre, si μ est une de ses valeurs propres, associée au vecteur propre y, on a $w(y) = \mu y \implies w^2(y) = \mu^2 y = \lambda_i y$. Il vient $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque μ est positif. Ainsi, $w_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_i}$.
   (d) Ainsi, w coïncide avec v sur chaque E_i, et puisque E est somme directe des E_i, $w = v$.
4. (a) Si $x \neq 0$, on a :
$$(f(f^*(x)), x) = (f^*(x), f^*(x)) > 0,$$
   car $f^*(x) \neq 0$ puis que f^* est inversible.
   (b) Prouvons d'abord l'unicité, en supposant que $f = h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$. On a nécessairement $f \circ f^* = h_1^2 = h_2^2$. Puisque h_1 et h_2 doivent être autoadjoints positifs, le résultat des questions précédentes prouve que $h_1 = h_2$. On en déduit, en inversant h_1 et h_2, que $g_1 = g_2$. Ce raisonnement nous guide alors pour l'existence. Posons h la racine carré positive de $f \circ f^*$, qui est donnée par les questions précédentes. Il faut remarquer que h est *définie* positive, car h est inversible puisque h^2 l'est. On pose ensuite $g = h^{-1}f$, de sorte que $g \circ g^* = h^{-1}f \circ f^* h^{-1} = h^{-1}h^2h^{-1} = Id_E$, ce qui prouve que g est une isométrie vectorielle.

c. Isométries vectorielles / Matrices orthogonales

Exercice 19.

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Correction.

On va prouver que ce sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1. Commençons par la première colonne de la matrice M orthogonale et triangulaire supérieure. Puisque sa norme vaut 1, et que seul le premier coefficient est non-nul, celui vaut ± 1. Considérons désormais la deuxième colonne, dont les coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,2}$ et $m_{2,2}$. Puisque la première colonne est orthogonale à cette colonne, on a $\pm m_{1,2} = 0$ et donc $m_{1,2} = 0$. En considérant la norme, on trouve que $m_{2,2} = \pm 1$. Considérons maintenant la troisième colonne. Ses coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ et $m_{3,3}$. Écrivons que la troisième colonne est orthogonale à la première. On trouve $m_{1,3} = 0$. Écrivons ensuite que la troisième colonne est orthogonale à la seconde. On trouve $m_{2,3} = 0$. Le calcul de la norme donne $m_{3,3} = \pm 1$. On continue ainsi pour chaque colonne. Réciproquement, une matrice diagonale dont les coefficients

diagonaux sont égaux à ± 1 est bien une matrice orthogonale.

Exercice 20.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On considère l'endorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Correction.

Il faut d'abord prouver que ϕ est une symétrie, c'est-à-dire que $\phi \circ \phi = Id$. Mais c'est clair, car $P(-(-X)) = P(X)$. Il faut aussi démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que ϕ conserve le produit scalaire, ou encore que

$$\langle \phi(P), \phi(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle$$

pour tous polynômes $P, Q \in E$. Mais,

$$\langle \phi(P), \phi(Q)\rangle = \int_{-1}^{1} P(-t)Q(-t)dt = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \langle P, Q\rangle,$$

le seul argument utilisé étant le changement de variables $u = -t$.

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $a \in E\backslash\{0\}$. On pose

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a, x)}{(a, a)}a,$$

Montrer s_a est une isométrie vectorielle. Calculer $\ker(s_a - id)$, $\ker(s_a + id)$. Décrire alors géométriquement s_a.

Correction.

Posons $F = \mathrm{Vect}(a)$ et $G = a^{\perp}$. Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = g + \lambda a$, avec $g \in G$. On a alors :

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a, \lambda a)}{(a, a)}a = \lambda a + g - 2\lambda a = g - \lambda a.$$

Ceci prouve en particulier, à l'aide de la relation de Pythagore, que $\|x\|^2 = \|s_a(x)\|^2 = \|g\|^2 + \lambda^2\|a\|^2$, et que s_a est une isométrie vectorielle. Le calcul précédent prouve en outre que $\ker(s_a - id) = G$ et $\ker(s_a + id) = \mathrm{Vect}(a)$. Ainsi, on a

$$\ker(s_a - id) \oplus^{\perp} \ker(s_a + id) = E.$$

s_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $a^{\perp}$.

Exercice 22.

On considère la matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

Correction.

La matrice M est clairement symétrique, et on vérifie qu'elle est orthogonale en vérifiant que les vecteurs colonnes sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, notons λ_1, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres. Puisque M est une matrice orthogonale, c'est une isométrie et donc $\lambda_i \in \{-1, 1\}$. De plus, on sait que M est semblable à la matrice diagonale avec λ_1, λ_2 et λ_3 sur la diagonale. Comme la trace est un invariant de similitude, on doit avoir $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. La seule possibilité est que 1 est valeur propre double, et -1 est valeur propre simple. De plus, puisque M est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et vaut donc $(X-1)(X+1)$.

Exercice 23.

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On remarque que la matrice A est symétrique et orthogonale. L'endomorphisme canoniquement associé est donc une symétrie orthogonale. Pour le déterminer complètement, il suffit de déterminer l'ensemble de ses points invariants. On résout donc l'équation $AX = X$, et on trouve que l'ensemble des points invariants est $F = \mathrm{vect}(1, 4, 1)$. A est donc la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à F, ou encore du retournement par rapport à F.

Exercice 24.

Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On vérifie que les colonnes de A forment une base orthonormée. Ainsi, f est une isométrie vectorielle. De plus, $\det(A) = 1$. f est donc une rotation. Cherchons son axe en cherchant ses points fixes. L'équation $AX = X$ donne que l'axe est la droite $\mathrm{vect}(1,1,1)$. Posons $u = (1,1,1)$. Pour déterminer l'angle de cette rotation, que l'on note θ, on remarque qu'en écrivant la matrice de f sous forme réduite, on a $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$. Or, $\mathrm{Tr}(A) = 2$, et donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Pour conclure quant au signe de θ, on peut remarquer que, posant $v = (1,-1,0)$, qui est orthogonal à u, alors la base $(u, v, f(v))$ est directe, ce qui signifie que $\theta \in]0,\pi[$ modulo 2π. On en déduit donc que f est la rotation d'axe dirigé par $(1,1,1)$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 25.

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

Correction.

1. On sait que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Or, le produit scalaire de deux colonnes différentes est toujours égal à σ, et la norme de chaque colonne vaut $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$. On a donc

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } (a^2+b^2+c^2) = 1.$$

Or, si $\sigma = 0$, on a

$$S^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma = a^2+b^2+c^2.$$

On en déduit donc que

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1 \iff \sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1.$$

2. On a

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff M \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } \det(M) = 1 \iff \sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1 \text{ et } \det(M) = 1.$$

Calculons le déterminant de M. On a

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\
&= S\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\
&= S(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= S(S^2-3\sigma).
\end{aligned}$$

Maintenant, si on sait déjà que $S = \pm 1$ et $\sigma = 0$, alors $\det(M) = S$, et donc $\det(M) = 1$ est équivalent à $S = 1$.

Exercice 26.

Soient E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une symétrie orthogonale de E.

1. Déterminer l'isométrie vectorielle $s \circ r \circ s$.
2. Déterminer l'isométrie vectorielle $r \circ s \circ r$.
3. A quelle condition a-t-on $s \circ r = r \circ s$?

Correction.

1. Soit e_1 un vecteur unitaire tel que s soit une symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(e_1)$, et soit e_2 tel que (e_1, e_2) soit un repère orthonormé direct. On constate que $s \circ r \circ s$ est une isométrie vectorielle du plan de déterminant égal à 1. C'est donc une rotation. Pour connaitre l'angle de cette rotation, il suffit de calculer l'image d'un vecteur, par exemple e_1. Notons θ l'angle de r. Alors :

$$\begin{aligned}
s \circ r \circ s(e_1) &= s \circ r(e_1) \\
&= s\big(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\big) \\
&= \cos\theta e_1 - \sin\theta e_2 \\
&= \cos(-\theta)e_1 + \sin(-\theta)e_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $s \circ r \circ s$ est la rotation d'angle $-\theta$ (c'est-à-dire r^{-1}). Un autre raisonnement peut-être plus simple peut être mené. $s \circ r$ est une transformation orthogonale comme composée de transformations orthogonales, son déterminant est -1 comme produit des déterminants de r et de s, donc $s \circ r$ est une symétrie orthogonale. Elle est d'ordre 2 donc $(s \circ r) \circ (s \circ r) = Id$. Par associativité, on a $(s \circ r \circ s) \circ r = Id$ et donc (par unicité de l'inverse), $s \circ r \circ s = r^{-1}$.

2. Notons $\sigma = r \circ s \circ r$. Alors on a d'après la question précédente

$$s \circ \sigma = s \circ r \circ s \circ r = r^{-1} \circ r = Id.$$

Ainsi,

$$\sigma = s^{-1} = s.$$

3. Supposons que $s \circ r = r \circ s$. Puisque $s = s^{-1}$, en composant à droite par s, on trouve

$$s \circ r \circ s = r.$$

Mais le terme de gauche est la rotation d'angle $-\theta$ si r est la rotation d'angle θ. Il faut donc que ces deux rotations coïncident. Ceci n'est possible que si r est la rotation d'angle 0 ou la rotation d'angle π, c'est-à-dire si $r = Id$ ou $r = -Id$. Réciproquement, si $r = Id$ ou $r = -Id$, s et r commutent.

Exercice 27.

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v.

Correction.

Il suffit de déterminer les rotations et les symétries qui envoient u sur v. Pour les rotations, c'est très simple : il ne peut que s'agir de la rotation d'angle (u, v). Pour les symétries, il y a deux cas à distinguer :

— Si $u = v$ ou si $u = -v$, alors il ne peut s'agir que de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{vect}(u, v)$.

— Si uv et v be sont pas colinéaires, alors soit s une symétrie orthogonale par rapport à la droite D qui envoie u sur v. Notons e_1 un vecteur directeur unitaire de D, et e_2 un vecteur unitaire orthogonal à e_1. L'expression analytique de la symétrie s est

$$s(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 - x_2e_2.$$

Notons $u = u_1e_1 + u_2e_2$ et $v = v_1e_1 + v_2e_2$. Alors $s(u) = v$ entraine $u_1 = v_1$ et $u_2 = -v_2$. Faisons la somme de u et v, on en déduit que e_1 est proportionnelle à $u + v$ et donc s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{vect}(u + v)$. Réciproquement, la symétrie orthogonale s par rapport à $\mathrm{vect}(u + v)$ envoie bien u sur v. En effet, puisque $\|u\| = \|v\| = 1$, $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux et s est aussi la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(u + v)$ parallèlement à $\mathrm{vect}(u - v)$. Écrivant $u = \frac{1}{2}\big((u + v) + (u - v)\big)$, on obtient immédiatement que $s(u) = v$.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit $f \in O^-(E)$. Démontrer que f est la composée d'une rotation d'axe une droite D et de la réflexion par rapport à $D^\perp$.

Correction.

Il existe une base orthonormale (u, v, w) de E telle que la matrice de f dans cette base orthonormale soit de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Notons $D = \mathrm{vect}(u)$ de sorte que $D^\perp = \mathrm{vect}(v, w)$. Soit s la réflexion par rapport à $D^\perp$. Sa matrice dans la base (u, v, w) est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de $s \circ f$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est bien la matrice d'une rotation r d'axe D. Puisque $s^{-1} = s$, on a bien

$$f = r \circ s = s \circ r$$

qui est donc la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Exercice 29.

Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

A va représenter une rotation si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Pour que la première colonne soit de norme 1, il faut et il suffit de $a = 0$. Pour que la deuxième colonne soit orthogonale à la première, il faut et il suffit que $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Remarquons que dans ce cas la deuxième colonne est bien de norme 1. Pour déterminer c, d, e, plusieurs méthodes sont envisageables :

- La plus simple est d'utiliser le produit vectoriel. Si (u, v) est une famille orthonormale, le seul vecteur w tel que (u, v, w) forme une base orthonormée directe est $w = u \wedge v$. On trouve alors facilement que $c = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$ et $e = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
- On écrit toutes les relations connues : l'orthogonalité de la première et de la troisième colonne donne $c + e = 0$, celle de la deuxième et de la troisième donne $c + d - e = 0$. On obtient alors $c = -e$ et $d = 2e$. Sachant que $c^2 + d^2 + e^2 = 1$, ceci permet de déterminer e au signe près. On calcule alors le déterminant de la matrice A, qui doit être égal à 1, pour trouver le signe de e.

Exercice 30.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est noté $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur $(1,1,1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est noté $\vec{v}$. Dans cet exercice, on souhaite calculer la matrice M dans la base canonique de la rotation r d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$ et d'angle $2\pi/3$.

1. Méthode 1 : en étudiant la restriction de r au plan affine P d'équation $x + y + z = 1$, déterminer la matrice M.
2. Méthode 2 : En utilisant la matrice de r dans une base orthonormée directe donc le premier vecteur est le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$, déterminer M.

Correction.

1. Utilisons les notations affines suivantes : $O = (0,0,0)$, $A = O + \vec{i}$, $B = O + \vec{j}$, $C = O + \vec{k}$. Alors ABC est un triangle équilatéral du plan P. De plus, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{v}$ est orthogonale au plan P et elle coupe ce plan en $(1/3, 1/3, 1/3)$, centre de gravité du triangle équilatéral ABC. Donc la restriction de r au plan P transforme A en B, B en C et C en A. Ceci permet de conclure que $r(\vec{i}) = \vec{j}$, $r(\vec{j}) = \vec{k}$ et $r(\vec{k}) = \vec{i}$. Donc
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Cette méthode est facile mais un peu particulière puisqu'elle dépend fortement de la nature géométrique de r. La méthode de la question 2 est plus générale.
2. Soit $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Le vecteur $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ est unitaire et orthogonal à e_1. Posons ensuite $e_3 = e_1 \wedge e_2$, de sorte que
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$
La famille $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La matrice de r dans cette base est
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$
La matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) est
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$
Par les formules de changement de base, on a
$$M = PM_1P^T.$$
Tout calcul fait, on retrouve bien sûr la même matrice qu'à la première question !

Exercice 31.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Démontrer que u est une symétrie.

Correction.

Soit λ une valeur propre de u, de vecteur propre associé x. Alors on a

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \times \|x\|.$$

Ainsi, on a $\lambda = \pm 1$. Ainsi, dans une base de vecteurs propres, la matrice de u est constituée de 1 et de -1 sur la diagonale. C'est bien la matrice d'une symétrie.

d. Divers

Exercice 32.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle = 0$.
2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.
3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^{\perp}$.
4. Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $F^{\perp}$ est stable par u.
5. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2)$.
6. Démontrer que le spectre de u est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.
7. Montrer que u^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.
8. Soit F un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2 = -\alpha^2 Id_F$, où $\alpha > 0$. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de v dans cette base soit de la forme
$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$
où
$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a pour

forme

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. D'une part, il est clair que si u est antisymétrique, alors $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$ et donc $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, supposons que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et considérons $x, y \in E$. Alors on a

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$$

et aussi

$$\begin{aligned} \langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$$

et donc que u est antisymétrique.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit A la matrice de u dans cette base. Alors on a $a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ pour tous i, j. Supposons désormais que u est antisymétrique. Alors pour tout couple (i, j), on a

$$a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle = -a_{j,i}$$

et la matrice A est bien antisymétrique. Réciproquement, supposons que A est antisymétrique, et prouvons que u est bien antisymétrique. On sait que l'on a $\langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle$. Fixons maintenant $x, y \in E$ et écrivons les $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j u(e_j), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_j y_i \langle u(e_j), e_i\rangle \\ &= -\sum_{i,j=1}^n x_j y_i \langle e_j, u(e_i)\rangle \\ &= -\left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{i=1}^n y_i u(e_i) \right\rangle \\ &= -\langle x, u(y)\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que u est antisymétrique.

3. Pour démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^\perp$, il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(u) \subset (\ker u)^\perp$, puis de remarquer que ces deux sous-espaces ont la même dimension, qui vaut $\dim(E) - \dim(\ker(u))$. Prenons donc $y \in \mathrm{Im}(u)$, que l'on écrit $y = u(x)$ et soit $z \in \ker(u)$. Alors on a
$$\langle y, z\rangle = \langle u(x), z\rangle = -\langle x, u(z)\rangle = 0$$
et donc on a bien $y \in (\ker u)^\perp$.
4. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Alors on a
$$\langle u(y), x\rangle = -\langle y, u(x)\rangle = 0$$
puisque $y \in F^\perp$ et $u(x) \in u(F) \subset F$.
5. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(u^2)$. Alors
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = -\langle x, u^2(x)\rangle = 0$$
et donc $x \in \ker(u)$.
6. Si le spectre de u n'est pas vide, soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre (non-nul) associé. Alors
$$\langle u(x), x\rangle = 0$$
alors que l'on a aussi
$$\langle u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$$
et donc $\lambda = 0$.
7. Il est facile de prouver que u^2 est diagonalisable, car en effet, u^2 est un endomorphisme autoadjoint : pour tous $x, y \in E$,
$$\langle u^2(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^2(y)\rangle.$$
Soit maintenant λ une valeur propre de u^2, de vecteur propre associé x. Comme ci-dessus, on a
$$\langle u^2(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2.$$
D'autre part,
$$\langle u^2(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2,$$
ce qui prouve bien que $\lambda \leq 0$.
8. On va procéder par récurrence sur la dimension de F. Remarquons déjà que la dimension de F ne peut pas être égale à 1. En effet, en dimension 1, un endomorphisme antisymétrique ne peut être que nul (regarder par exemple la matrice). Supposons donc que F soit de dimension 2. Soit e_1 un vecteur unitaire de F, et soit $e_2 = \frac{1}{\alpha}v(e_1)$. On a alors
$$v(e_2) = \frac{1}{\alpha}v^2(e_1) = -\alpha e_1.$$
Ainsi, la matrice de v dans la base (e_1, e_2) est bien $J(\alpha)$. Reste à voir que (e_1, e_2) est une base orthonormée. On a en effet
$$\langle e_1, e_2\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle e_1, v(e_1)\rangle = -\frac{1}{\alpha}\langle v(e_1), e_1\rangle = -\langle e_2, e_1\rangle$$
et donc $\langle e_1, e_2\rangle = 0$. D'autre part,
$$\|e_2\|^2 = \frac{1}{\alpha^2}\langle v(e_1), v(e_1)\rangle = \frac{-1}{\alpha^2}\langle e_1, v^2(e_1)\rangle = \|e_1\|^2 = 1.$$

Supposons désormais le résultat démontré pour toute dimension inférieure ou égale à $p-1$ et démontrons-le en dimension p. Soit (e_1, e_2) une famille orthonormale de F définie comme dans le cas de la dimension 2. Posons $G = \mathrm{vect}(e_1, e_2)^\perp$, qui est stable par v, et $v_{|G}$ est un endomorphisme antisymétrique de G. Par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une base orthonormale $(e_3, \ldots, e_p)$ de G telle que la matrice de $v_{|G}$ ait la bonne forme. La matrice de v dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ de v a alors la forme voulue.

9. Notons $-\alpha_1^2, \ldots, -\alpha_r^2$ les valeurs propres non-nulles de u^2, et E_i les espaces propres associés. On sait que
$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus \ker(u^2)$$
et la somme est orthogonale. On réduit ensuite u dans chaque sous-espace propre de u^2 en utilisant la question précédente, et puisque $\ker(u) = \ker(u^2)$, u est l'endomorphisme nul sur $\ker(u^2)$. En recollant toutes ces bases orthonormales, on obtient la réduction voulue pour u.