Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°19

Partie A

Théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes :

1. $\left(\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt\right)$ **2.** $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}\right)$

3. $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx\right)$ **4.** $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t^n) dt\right)$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

Exercice 2.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \to e^x$ et que $|f_n(x)| \leq e^x$.
2. En déduire, pour $b > 1$, la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx$.

Exercice 3.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx$.

Exercice 4.

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+e^x}\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\right)$

Exercice 5.

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,dx\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx\right)$

Exercice 6.

Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Exercice 7.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Exercice 8.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Exercice 9.

1. (a) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

2. En calculant de deux façons $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Exercice 10.

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

2. Exercices d'entraînement

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. On pose $I_n = n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$. Déterminer $\ell = \lim_{n \to +\infty} I_n$.
2. On suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée, et vérifie $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.
3. On ne suppose plus que f est $\mathcal{C}^1$, mais uniquement que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = f'(0)$.
   (a) Justifier que g est bornée.
   (b) Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente reste vrai.

Exercice 12.

On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n} dt.$$

1. Déterminer $\ell = \lim_{n \to +\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

Exercice 13.

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Exercice 14.

Soit (a_n) une suite de $]0, +\infty[$ qui converge vers 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx$.

Exercice 15.

Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que
$$\Re e\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}x} dx\right) = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$
2. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta} x^n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}x} dx.$$
3. Conclure que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Exercice 16.

Le but de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}.$$

1. Justifier la convergence de chacun des membres de l'égalité précédente.
2. Pour p et q des entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$; justifier la convergence de cette intégrale.
3. Calculer $I(m,0)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $I(p,q)$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
5. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, justifier que
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n,n).$$
6. Conclure.

Exercice 17.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Exercice 18.

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Partie B

Intégrales à paramètres

1. Exercices basiques

Exercice 19.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 20.

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 21.

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$.
3. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et former une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
4. En déduire qu'il existe une suite (λ_n) telle que, pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$

   Que vaut λ_n ?

Exercice 22.

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Justifier que F tend vers 0 en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Exercice 23.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de I.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 24.

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, démontrer que

$$f(x) \sim_{0^+} -\ln x.$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 25.

Soient $a, b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.
2. Prouver que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt,$$

   où $\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.
5. En déduire la valeur de C.

Exercice 26.

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$

2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0) e^{-x^2/4a}$, puis que

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

3. Démontrer que f est développable en série entière.

Exercice 28.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

   Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.
5. (a) Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$.

   (b) Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1 - t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

   Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Gamma(x)$.
6. En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du.$$

7. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 29.

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 30.

Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
2. En déduire la valeur de
$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt \right)^{1/\alpha}.$$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31.

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.
2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 1$,
$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt.$$
En déduire le sens de variation de F.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+. Démontrer que pour tout $A > 0$ et tout $x > 1$, on a
$$\ell \geq \int_1^A \frac{dt}{1+t^x}.$$
5. En déduire que $\lim_{x \to 1^+} F(x) = +\infty$.

Exercice 32.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y > x$.

2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?
3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$, et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.