Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°19

Partie A

Théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes :

1. $\left(\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt\right)$ **2.** $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}\right)$

3. $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx\right)$ **4.** $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t^n) dt\right)$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

Correction.

Dans chaque cas, on va appliquer le théorème de convergence dominée.

1. Pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $(\tan t)^n \to 0$ car $\tan t \in [0,1[$. De plus, pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $|\tan t| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est une fonction intégrable sur $]0, \pi/4[$. Toutes les fonctions invoquées étant continues par morceaux, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} 0 dt = 0.$$
Remarquons que le fait que $\left((\tan(\pi/4))^n\right)$ ne tende pas vers 0 ne pose pas de problèmes. Il suffit d'avoir la convergence simple sur l'intervalle ouvert.
2. Remarquons que l'intégrale considérée converge pour $n \geq 2$ par comparaison à une intégrale de Riemann. Pour tout $t > 1$, on a
$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$
De plus, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$, on a
$$\left|\frac{1}{1+t^n}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$
La fonction à droite de l'inégalité est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = 0.$$

Remarquons qu'on peut aussi très bien prouver ce fait sans utiliser le théorème de convergence dominée. En effet, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$ pour trouver

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \leq \frac{1}{n-1}$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{-x}{n} \to 0$ si $n \to +\infty$ et par composition des limites $\exp(-x/n) \to \exp(0) = 1$ si $n \to +\infty$. On a donc, pour tout tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, soit $x \in]0, +\infty[$ et $n \geq 1$. Alors $-x/n \leq 0$ et donc $\exp(-x/n) \leq 1$. Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Pour tout $t \in [0, 1[$, (t^n) tend vers 0 et donc, par continuité de f, $(f(t^n))$ tend vers $f(0)$. L'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée est un peu plus subtile à obtenir, mais le raisonnement est très classique. On remarque que, puisque f est continue sur $[0, 1]$, elle y est bornée, disons par $M \geq 0$. Mais alors, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$|f(t^n)| \leq M$$

et M (qui est une constante) est intégrable sur l'intervalle borné $]0, 1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 f(0) dt = f(0).$$

Exercice 2.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \to e^x$ et que $|f_n(x)| \leq e^x$.
2. En déduire, pour $b > 1$, la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx$.

Correction.

1. On a
$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$
Or, $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}$ et donc, par composition des limites, $f_n(x) \to e^x$. De plus, pour $u > 0$, on a $\ln(1+u) \leq u$. On en déduit que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n \times \frac{x}{n}\right) \leq \exp(x).$$

2. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_n(x) = f_n(x)e^{-bx}$. En effet, cette suite de fonctions converge simplement vers $e^{(1-b)x}$ et, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, on a la majoration $|g_n(x)| \leq e^{(1-b)x}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ (car $b > 1$). On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx = \int_0^1 e^{(1-b)x} dx = \frac{1}{b-1}.$$

Exercice 3.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx$.

Correction.

1. Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \geq 0$. Pour déterminer le maximum de f_n sur $[0,1]$, on dérive cette fonction :
$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}\big(1 - (n+1)x\big).$$
La dérivée s'annule en $x_n = 1/(n+1)$ et donc, pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(x_n) = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq 1.$$

2. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée. Par comparaison des fonctions polynômes et puissances, pour tout $x \in]0,1[$, on a $f_n(x) \to 0$. De plus, $|f_n| \leq 1$ et les constantes sont intégrables sur l'intervalle borné $[0,1]$. Par le théorème de convergence dominée, on trouve
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx = 0.$$

Exercice 4.

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\right)$

Correction.

1. Posons, pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$. Alors,
   - Pour tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x) \to e^{-x}$ si $n \to +\infty$;
   - $f_n(1) \to \frac{1}{1+e^1}$.
   - Pour tout $x > 1$, on a $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ et cette fonction est intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

2. Posons $g_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$. On écrit
   $$\sqrt[n]{1 + x^n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1 + x^n)\right).$$
   Pour $x \in]0, 1]$, on en déduit que $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$. Pour $x > 1$, on a
   $$\sqrt[n]{1 + x^n} = \exp\left(\frac{1}{n} n \ln(x) + \frac{1}{n}\ln(1 + x^{-n})\right) \to x.$$
   De plus, on a pour tout $x > 0$, $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, fonction qui est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc, d'après le théorème de convergence dominée,
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)x}.$$
   Reste à calculer chaque intégrale. La première ne pose pas de problèmes, elle vaut $\pi/4$. Pour la seconde, on écrit
   $$\begin{aligned} \int_1^X \frac{dx}{(1 + x^2)x} &= \int_1^X \frac{dx}{x} - \int_1^X \frac{x}{1 + x^2} dx \\ &= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]_1^X \\ &= \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1 + X^2) + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$
   On fait alors tendre X vers $+\infty$, et on remarque que
   $$\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1 + X^2) = \ln(X) - \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1 + X^{-2}) \longrightarrow_{X\to+\infty} 0.$$
   On en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 5.

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,dx\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx\right)$

Correction.

1. Posons $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$. Pour $x > 0$, $\arctan(nx) \to \pi/2$. Pour $x \in]0,1[$, $\exp(-x^n) \to 1$, pour $x = 1$, $\exp(-x^n) \to e^{-1}$ tandis que pour $x > 1$, $\exp(-x^n) \to 0$. De plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$|f_n(x)| \leq g(x)$$
avec $g(x) = \pi/2$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = \pi e^{-x}/2$ si $x > 1$. La fonction g étant intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$. Alors
   — Pour $x \in]0,1[$, $f_n(x) \to 0$;
   — $f_n(1) = 1/2$;
   — Pour $x > 1$, $f_n(x) \to 1/x^2$.

   Reste à trouver une fonction dominante intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée. Posons $g(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$. Alors g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et il est facile de vérifier que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$. Par le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Exercice 6.

Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de
$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Correction.

On pose $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n[}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour n assez grand, $x \in [0,n[$. On a alors
$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(-\frac{x}{n} + o(1/n)\right)\right) \\ &= \exp\big(-x + o(1)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \to e^{-x}$. De plus, puisque $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$, on obtient

$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}\right)\right) \leq e^{-x}$$

(cette inégalité est valable même si $x \notin [0, n[$). Puisque la fonction e^{-x} est intégrable, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

En réalité, ici, l'usage du théorème de convergence dominée est complètement inutile. L'intégrale se calcule très facilement

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1},$$

quantité qui tend bien évidemment vers 1.

Exercice 7.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Correction.

On va appliquer le théorème de convergence dominée, mais après le changement de variables $t = x^n$ dans la première intégrale. On a alors

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt.$$

Posons alors, pour $n \geq 1$ et $t \geq 1$, $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}$. Il est clair que, pour tout $t \geq 1$, $f_n(t) \to \frac{e^{-t}}{t}$. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut encore vérifier l'hypothèse de domination. Mais, tout $t \geq 1$ et $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{t^{1/n}}{t} = \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} \leq 1$. Autrement dit, on a prouvé que, pour tout $t \geq 1$ et tout $n \geq 1$, on a

$$|f_n(t)| \leq e^{-t}.$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Il est donc légitime d'appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 8.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaitre dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. Alors

— Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

— Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

2. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} = \sum_{n\geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

Exercice 9.

1. (a) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

2. En calculant de deux façons $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Correction.

1. (a) Posons $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Chaque fonction u_n est positive. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_n u_n(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

(somme géométrique), fonction qui est continue sur $]0,1[$. De plus, on a

$$\int_0^1 u_n(x) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. D'après le théorème d'intégration termes à termes, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

(b) On a également

$$\int_0^1 u_n(x)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Tenant compte de la parité des termes, on a finalement

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \ln 2.$$

2. Posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}(1-x)$. Pour $x \in]0,1[$, la suite $S_N(x)$ converge vers $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$ (toujours par un argument de série géométrique). De plus, on sait d'après la première question que la série $\sum_n \int_0^1 \left|(-1)^n x^{2n}(1-x)\right| dx$ est convergente. On peut donc à nouveau appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}(1-x)dx \\
&= \left[\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

On obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 10.

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

Correction.

On démontre facilement par récurrence que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. Mais alors, les hypothèses de l'exercice nous disent que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left| a_n x^n e^{-x} \right| dx = \sum_{n\geq 0} |a_n| n!$$

est convergente. De plus, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente sur tout segment $[0, A]$, car on peut majorer $|a_n x^n| \leq |a_n| A^n \leq |a_n| n!$ pourvu que n soit assez grand. La fonction somme est donc continue sur $[0, +\infty[$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration termes à termes et on trouve

$$\sum_{n\geq 0} a_n n! = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_n x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{-x}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. On pose $I_n = n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$. Déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. On suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée, et vérifie $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.
3. On ne suppose plus que f est $\mathcal{C}^1$, mais uniquement que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = f'(0)$.

(a) Justifier que g est bornée.

(b) Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente reste vrai.

Correction.

1. Effectuons le changement de variables $u = nx$. Alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)e^{-u}du.$$

Mais, pour tout $u > 0$, $f(u/n)e^{-u}$ tend vers $f(0)e^{-u}$ lorsque n tend vers l'infini (par continuité de f en 0). De plus, on a pour tout $n \geq 1$ et tout $u > 0$,

$$|f(u/n)e^{-u}| \leq \|f\|_\infty e^{-u}.$$

Cette dernière fonction étant intégrable, on en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}du = f(0).$$

2. Les hypothèses nous invitent à effectuer une intégration par parties, en dérivant $u \mapsto f(u/n)$ et en intégrant $u \mapsto e^{-u}$. C'est légitime car $\lim_{n\to+\infty} f(u/n)e^{-u} = 0$. On obtient

$$I_n - f(0) = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f'(u/n)e^{-u}du.$$

En appliquant un raisonnement identique à celui de la première question (ou même en appliquant directement le résultat de la première question à f'), on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f'(u/n)e^{-u}du = f'(0) \neq 0.$$

Ceci entraine que

$$I_n - f(0) \sim_{+\infty} \frac{f'(0)}{n}.$$

3. (a) g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (parce que f est dérivable en 0) et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Utilisons que $f(0) = n\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ pour écrire

$$\begin{aligned} I_n - f(0) &= n\int_0^{+\infty} (f(x) - f(0))e^{-nx}dx \\ &= \int_0^{+\infty} (f(u/n) - f(0))\, e^{-u}du \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u}du. \end{aligned}$$

Or, pour tout $u > 0$, on a

$$\frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u} \to f'(0)ue^{-u}.$$

De plus, en notant M un majorant de $|g|$, on a

$$\left|\frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u}\right| = |g(u/n)|ue^{-u} \leq Mue^{-u}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On déduit donc du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u}du \to \int_0^{+\infty} f'(0)ue^{-u}du = f'(0),$$

ce qui redémontre le résultat de la question précédente sous des hypothèses plus faibles.

Exercice 12.

On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt.$$

1. Déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

Correction.

1. Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\frac{1}{1+t^n}\right| \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 1dt = 1.$$

2. On a

$$I_n - \ell = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = \int_0^1 t \times \frac{t^{n-1}}{1+t^n}dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve que

$$I_n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+t^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)dt.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+t^n)dt = 0,$$

ce qui se redémontre ou bien en majorant ou bien par le théorème de convergence dominée. On en conclut que

$$\ell - I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n}.$$

Exercice 13.

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Correction.

On commence par calculer $I_n(x)$: par un changement de variables, puis par des intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned} I_n(x) &= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \\ &= n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \end{aligned}$$

On voit donc que pour résoudre l'exercice, il suffit de prouver que $I_n(x)$ converge, à x fixé, vers $\Gamma(x)$. Introduisons $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Alors :

— Pour chaque t, on a $f_n(t) \to e^{-t} t^{x-1}$;

— De plus, utilisant que $\ln(1+x) \leq x$ (car le logarithme est concave), on a

$$\ln(1 - t/n) \leq -\frac{t}{n}.$$

Ainsi

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$

pour $|t| \leq n$. On en déduit que

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1},$$

fonction qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne le résultat.

Exercice 14.

Soit (a_n) une suite de $]0,+\infty[$ qui converge vers 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx$.

Correction.

Commençons par observer que, pour chaque entier n, l'intégrale est bien définie. En effet, si $C > 0$ est tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \geq 0$, alors on a

$$\left| \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} \right| \leq \frac{C a_n}{a_n^2 + x^2}$$

et la fonction à droite de l'inégalité est intégrable (le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, et elle est équivalente au voisinage de $+\infty$ à Ca_n/x^2). Déterminons maintenant la limite en utilisant le théorème de convergence dominée. Pour cela, on réalise le changement de variables $x = a_n u$. L'intégrale est alors égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(a_n x)}{1 + x^2} dx.$$

Posons $g(x) = \frac{\|f\|_\infty}{1+x^2}$. Alors la fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et de plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$\left| \frac{f(a_n x)}{1 + x^2} \right| \leq g(x).$$

En outre, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n x)}{1 + x^2} = \frac{f(0)}{1 + x^2}.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 15.

Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que
$$\Re e \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} dx \right) = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$
2. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta} x^n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} dx.$$
3. Conclure que
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$ est continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). Il n'y a pas de problèmes d'intégrabilité, et il s'agit juste d'un calcul d'intégrales :

$$\begin{aligned}
\Re e\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) &= \int_0^1 \Re e\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta + x^2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\right]_0^1 \\
&= -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.
\end{aligned}$$

2. Posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^N e^{i(n+1)\theta}x^n$. On a

$$S_N(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(N+2)\theta}x^{N+1}}{1-e^{i\theta}x}$$

soit

$$|S_N(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}x|}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,1]$ et ne dépend pas de N. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, $S_N(x)$ converge vers $\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta x}}$ lorsque N tend vers $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx.$$

Remarquons qu'on ne pouvait appliquer le théorème d'intégration terme à terme ici car la série de terme général $\int_0^1 \left|e^{i(n+1)\theta}x^n\right| dx$ est divergente.

3. La première somme apparaissant ci-dessus vaut encore $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$. Il suffit alors de prendre la partie réelle de l'égalité et d'appliquer le résultat de la première question.

Exercice 16.

Le but de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}.$$

1. Justifier la convergence de chacun des membres de l'égalité précédente.
2. Pour p et q des entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(\ln x)^q dx$; justifier la convergence de cette intégrale.
3. Calculer $I(m,0)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $I(p,q)$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

5. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, justifier que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n,n).$$

6. Conclure.

Correction.

1. Pour la série, il suffit de remarquer que, pour $m \geq 2$, on a

$$0 \leq \frac{1}{m^m} \leq \frac{1}{m^2}.$$

Puisque la série $\sum_m \frac{1}{m^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_m \frac{1}{m^m}$. Concernant l'intégrale impropre, on commence par écrire

$$f(x) = \frac{1}{x^x} = \exp(-x \ln x).$$

Cette fonction est continue sur $]0,1]$, et se prolonge même par continuité en 0 par $f(0) = 1$, car $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$. Ainsi, f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et en fait on n'a pas affaire à une intégrale impropre.

2. La fonction $x \mapsto x^p (\ln x)^q$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

$$\sqrt{x} \times (x^p (\ln x)^q) \to 0 \text{ lorsque } x \to 0.$$

Ainsi, en 0, $x^p(\ln x)^q = o(1/\sqrt{x})$, et comme $1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $[0,1]$, il en est de même de $x \mapsto x^p(\ln x)^q$.

3. C'est un calcul de primitive direct, et on trouve $I(m,0) = \frac{1}{m+1}$.

4. Supposons $q \geq 1$. On va intégrer par parties :

$$\int_0^1 x^p (\ln x)^q dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (\ln x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1} x^{p+1} \frac{q}{x} (\ln x)^{q-1} dx = -\frac{q}{p+1} I(p, q-1).$$

Par une récurrence immédiate, on trouve

$$I(p,q) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} I(p,0) = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

5. On écrit à nouveau que $\frac{1}{x^x} = \exp(-x \ln x)$, et on utilise que pour tout réel u, on a $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\ln x)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n dx.$$

On peut alors justifier la permutation de la somme et de l'intégrale en utilisant le théorème de convergence dominée : en effet, pour $N \geq 1$, on utilise que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\ln x)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n \leq \frac{1}{x^x},$$

et cette dernière fonction est intégrable.

On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n,n).$$

6. On remplace $I(n,n)$ par sa valeur, puis on fait un changement d'indices :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}.$$

Exercice 17.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge par continuité en 1 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaitre dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. Alors <ul class="rien">
2. Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

3. Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

4. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{e^{-at}}{1-e^{-bt}} = \sum_{n\geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

Exercice 18.

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Correction.

On sait que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$. On en déduit que, pour tout $x \geq 0$, $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$. Posons, pour $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$. Alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ vers $\cos(\sqrt{x})e^{-x}$. De plus, on a

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{(2n)!}dx.$$

Or, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$ et donc

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!}$$

et ceci est une série convergente, comme on peut le constater en appliquant le critère de d'Alembert. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Partie B

Intégrales à paramètres

1. Exercices basiques

Exercice 19.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Correction.

1. Il n'y a bien sûr pas de problèmes si $x = 0$. Si $x \neq 0$, alors $\sin(xt) \sim_0 xt$ et donc la fonction se prolonge par continuité en 0. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a pour $t \geq 1$,
$$\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \leq e^{-t}.$$
La fonction e^{-t} étant intégrable sur $[0, +\infty[$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$. Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et vaut
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt) e^{-t}.$$
C'est donc une fonction continue des deux variables x et t. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$,
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-t}$$
et cette dernière fonction est intégrable. On en déduit, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vaut
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt.$$
3. On peut calculer cette dernière intégrale en écrivant $\cos(xt)$ comme $\Re e(e^{ixt})$. On a donc
$$\begin{aligned} F'(x) &= \Re e \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) \\ &= \Re e \left(\frac{1}{1 - ix} \right) \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$
4. En intégrant F' entre 0 et x, on trouve que
$$F(x) - F(0) = \arctan(x) - \arctan(0) \implies F(x) = \arctan(x).$$

Exercice 20.

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus, en 0, elle est équivalente à t^{x-1}. Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$. Le domaine de définition de f est donc $]0,+\infty[$.
2. On va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Pour cela, on fixe un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, et on va appliquer le théorème de continuité sur ce segment. Remarquons que l'application $(x,t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $[a,b]\times]0,1[$ comme fonction de deux variables. De plus, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,1[$, on a
$$0 \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t}$$
(pour prouver cette inégalité, écrire $t^{x-1} = \exp\big((x-1)\ln t\big)$ par exemple). Or, la fonction $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1[$. On peut donc bien appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ce qui prouve que f est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Pour tout $x>0$, on a
$$f(x)+f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}dt = \int_0^1 t^{x-1}\frac{1+t}{1+t}dt = \frac{1}{x}.$$
4. Si $x \to 0$, alors $f(x+1)$ tend vers $f(1)$ car f est continue en 1, et donc $f(x+1) = o(1/x)$. On en déduit que $f(x) \sim_0 \frac{1}{x}$.
5. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. Pour tout $x \geq 1$, on a en effet
$$\left|\frac{t^{x-1}}{1+t}\right| \leq \frac{1}{1+t}$$
qui est une fonction intégrable sur $]0,1[$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} = 0.$$
On en déduit par le théorème de convergence dominée que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Une autre possibilité, sans le théorème de convergence dominée, était simplement d'utiliser l'encadrement
$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$
puis d'appliquer le théorème des gendarmes.

Exercice 21.

Pour $n \geq 1$ et $x>0$, on pose
$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$.

3. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et former une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
4. En déduire qu'il existe une suite (λ_n) telle que, pour tout $x>0$, on a

$$I_n(x)=\frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$

Que vaut λ_n ?

Correction.

1. Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(t^2+x^2)^n}\sim\frac{1}{t^{2n}}.$$

Par comparaison, la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Il s'agit d'une intégrale connue :

$$I_1(x)=\left[\frac{1}{x}\arctan(t/x)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}.$$

3. Posons $f_n(x,t)=\frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ qui est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)=\frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

Fixons maintenant $0<a<b$ et supposons $x\in[a,b]$. Alors,

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend pas de x pourvu que $x\in[a,b]$), est intégrable sur $]0,+\infty[$, et donc I_n est de classe C^1 sur $[a,b]$. Puisque a et b sont arbitraires, I_n est C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$I_n'(x)=-2nxI_{n+1}(x)$$

pour $x>0$.
4. On va prouver ce résultat par récurrence sur $\mathbb{R}$, et on va en même temps obtenir une relation de récurrence pour la suite (λ_n). Le résultat est vrai pour $n=1$, avec $\lambda_1=\pi/2$. Supposons-le démontré au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Pour $x>0$, d'après la question précédente,

$$I_{n+1}(x)=\frac{-1}{2nx}\times\frac{-(2n-1)\lambda_n}{x^{2n}}=\frac{\lambda_{n+1}}{x^{2n+1}}$$

avec $\lambda_{n+1}=\frac{(2n-1)\lambda_n}{2n}$. On en déduit (classiquement) que

$$\lambda_n=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi.$$

Exercice 22.

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que F tend vers 0 en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Correction.

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $(x, t) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ dt est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$,
$$\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$
et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc l'intégrale définissant $F(x)$ converge. D'ailleurs, elle converge aussi pour $x = 0$.
2. On peut appliquer le théorème de convergence dominée ou, plus simplement, remarquer que, pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a
$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}.$$
On en déduit, par intégration de l'inégalité, que
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$
d'où la limite désirée d'après le théorème des gendarmes.
3. Posons $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Alors, pour tous $x, t > 0$, la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x d'ordre 1 et 2 qui sont données par
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$
Ces dérivées partielles sont continues comme fonctions des deux variables x et t. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on peut majorer sa valeur absolue par e^{-xt} qui est intégrable). De plus, fixons $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t > 0$, on a
$$\left| t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq e^{-at}$$
et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ avec
$$F''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$
En particulier, pour tout $x > 0$, on a
$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Exercice 23.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de I.

Correction.

1. La fonction $u : (x,t) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle par rapport à x valant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -2x(1+t^2)\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} = -2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue comme fonction des deux variables sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. De plus, si $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée sur le compact $[a,b] \times [0,1]$ disons par le réel $M > 0$. Comme M est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$, on en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que g est dérivable et que l'on a

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt.$$

De plus, par le théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable, de dérivée e^{-x^2}. Posons alors $h = g + f^2$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{(-tx)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0 \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $u = tx$. Ainsi, $h' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction h est constante. De plus,

$$h(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

ce qui prouve le résultat.

2. On va faire tendre x vers $+\infty$, et prouver que $g(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. C'est très facile en utilisant le théorème de convergence dominée. On peut aussi remarquer que, pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$$

et donc

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

Par le théorème des gendarmes, ceci prouve que g tend vers 0 en $+\infty$. D'après l'équation précédente, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = \frac{\pi}{4}$. Puisque I est positive (comme intégrale d'une fonction positive), on en déduit que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 24.

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, démontrer que
$$f(x) \sim_{0^+} -\ln x.$$
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Correction.

1. Posons $u(x,t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$, définie et continue sur $]0, +\infty[\times[0, \pi/2]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0, \pi/2]$ (c'est une fonction continue sur un segment). Cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}.$$
Cette dérivée partielle est elle-même continue sur $]0, +\infty[\times[0, \pi/2]$. De plus, fixons $[a, b] \subset]0, +\infty[$ (en particulier, $a > 0$). Alors pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in [0, \pi/2]$, on a
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{(a+t)^2}$$
et cette dernière fonction est intégrable sur $[0, \pi/2]$. Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que
$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2} dt \leq 0.$$
Ainsi, f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Il n'est pas besoin d'appliquer un théorème sophistiqué. Ici, on a en effet
$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt = \ln\left(\frac{x+\pi/2}{x}\right) \to 0.$$
Par le théorème d'encadrement, f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Par encadrement, on a donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x}dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}dt,$$

soit

$$-\ln(x) + \ln(x+\pi/2) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x}dt \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x+\pi/2).$$

Le seul terme qui pose encore problème est l'intégrale. Mais, on remarque que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x}dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t}dt = \frac{\pi}{4}.$$

Il vient

$$-\ln(x) + \ln(x+\pi/2) - \frac{\pi}{8} \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x+\pi/2).$$

Il suffit ensuite de diviser par $-\ln x$ et de faire tendre x vers 0 pour en déduire le résultat voulu.

4. Il suffit d'encadrer le plus simplement possible le dénominateur. En effet, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+\pi/2}dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x}.$$

Il vient

$$\frac{1}{x+\pi/2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

et donc

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Exercice 25.

Soient $a, b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.
2. Prouver que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \psi'(t)\sin(xt)dt,$$

où $\psi(t) = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$.

5. En déduire la valeur de C.

Correction.

1. Définissons sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,
$$f(x,t)=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)$$
qui est une fonction continue. Si $x\in\mathbb{R}$ est fixé, on a
$$f(x,t)\to(b-a)$$
lorsque t tend vers 0 (faire un DL par exemple). Ainsi, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité en 0. De plus, au voisinage de $+\infty$,
$$t^2f(x,t)\to 0 \implies f(t,x)=_{+\infty} o(1/t^2).$$
Ainsi, $t\mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $F(x)$ est bien définie.
2. La fonction f est de classe C^1, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=(e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt).$$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t>0$, on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-bt}-e^{-at}$$
et cette dernière fonction, qui ne dépend plus de x, est intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, F est C^1 et
$$F'(x)=\int_0^{+\infty}(e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt)dt.$$
Or, il est facile de voir que, pour tout $c>0$,
$$\int_0^{+\infty}e^{-ct}\sin(xt)dt=\Im m\left(\int_0^{+\infty}e^{(-c+ix)t}dt\right)=\frac{x}{c^2+x^2}.$$
On en déduit que
$$F'(x)=\frac{x}{x^2+b^2}-\frac{x}{x^2+a^2}.$$
3. Il suffit d'intégrer la relation précédente.
4. La relation demandée est une simple intégration par parties (généralisée), justifiée par la convergence de toutes les intégrales en jeu (faites-le).
5. Faisons tendre x vers $+\infty$. On a d'une part,
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=C,$$
et d'autre part, de
$$|F(x)|\leq\frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty}|\psi'(t)|dt,$$
on tire $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. On en déduit que $C=0$.

Exercice 26.

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$
2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$, puis que
$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Correction.

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|e^{-itx} e^{-at^2}| = e^{-at^2}$$
qui est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $a > 0$. Ceci démontre à la fois que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et aussi que F est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a majoré l'intégrande (qui est continue) par une fonction intégrable ne dépendant pas de x. De plus, la fonction $(x,t) \mapsto e^{-itx} e^{-at^2}$ est de classe C^1, et sa dérivée partielle par rapport à x est $(x,t) \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$. Cette fonction vérifie
$$|-ite^{-itx} e^{-at^2}| \leq |t| e^{-at^2}$$
et la fonction qui est à droite de l'inégalité est intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x. Ceci prouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx} e^{-at^2} dt.$$
Une intégration par parties permet de se ramener à F :
$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{i}{2a} e^{-at^2} e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2} (-ixe^{-itx}) dt \\ &= -\frac{x}{2a} F(x). \end{aligned}$$
2. On résoud l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus,
$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle
$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$
3. Démontrer que f est développable en série entière.

Correction.

1. Posons $u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta)$, définie sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$. u est de classe C^∞, ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x étant
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta) = -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta) = -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta).$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0,\pi]$, on a
$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta)\right| \leq 1.$$
Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\pi]$. On en déduit que f est de classe C^2 puis que
$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta)d\theta, \;\; f''(x) = \int_0^\pi -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta.$$
2. Utilisant $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$, on a
$$xf''(x) + xf(x) = \int_0^\pi x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos\theta \times \big(x\cos(\theta)\cos(x\sin\theta)\big)d\theta.$$
On réalise alors une intégration par parties dans cette dernière intégrale, pour trouver
$$xf''(x) + f(x) = -f'(x).$$
3. En utilisant le développement en série entière de $\cos u$, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}d\theta.$$
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0,\pi]$,
$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$
et le terme de gauche est le terme général d'une série (indépendante de θ) qui converge. On en déduit donc que, à x fixé, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}$ converge normalement sur $[0,\pi]$. On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et on trouve que
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\pi (\sin\theta)^{2n}d\theta x^{2n}.$$
On a bien développé f en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1}e^{-t}|\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1}e^{-t}|\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

   Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.
5. (a) Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$.

   (b) Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1-t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

   Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \Gamma(x)$.
6. En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du.$$

7. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part, en 0, elle est équivalente à t^{x-1} qui, par le critère de Riemann, est intégrable si et seulement si $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est toujours intégrable. En effet, si t est assez grand, on a

$$0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$$

   et on conclut à l'intégrabilité par le théorème de majoration. On a donc prouvé que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.
2. (a) La fonction g_k est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, le problème de convergence se traite comme précédemment. Au voisinage de 0, on a

$$g_k(t) \sim -t^{A-1}\ln t$$

   et il s'agit d'une intégrale de Bertrand. On a $A - 1 > -1$. On peut trouver c dans l'intervalle $]-1, A-1[$. On a alors

$$g_k(t) =_0 o\left(t^c\right)$$

et ceci est une intégrale de Riemann convergente (en 0).

(b) Posons $f(t,x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Alors f est C^∞ sur $]0,+\infty[^2$, et

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

Soit $0 < A \leq B$ et $x \in [A,B]$. Pour $t \leq 1$, on a

$$|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \leq |\ln t|^k t^{A-1}e^{-t},$$

et d'autre part, pour $t \geq 1$, on a

$$|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \leq |\ln t|^k t^{B-1}e^{-t}.$$

D'après la question précédente, on a majoré les dérivées partielles par rapport à x indépendamment de $x \in [A,B]$ par une fonction intégrable. Par application du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, Γ est de classe C^∞ sur n'importe quel segment $[A,B] \subset]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

3. On intègre par parties, et on trouve :

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate que $\Gamma(n+1) = n!$. Enfin, pour x proche de 0, on a

$$\Gamma(x) \sim_0 \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim_0 \frac{\Gamma(1)}{x} \sim_0 \frac{1}{x}.$$

4. On a déjà calculé la dérivée seconde de Γ :

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Comme la fonction que l'on intègre est positive, il en est de même de l'intégrale. Γ est donc convexe puisque sa dérivée seconde est positive.

5. (a) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant concave, sa courbe représentative est sous ses tangentes, en particulier sous la tangente passant par le point $(0, \ln 1)$ d'équation $y = t$. On en déduit le résultat.

(b) Observons d'abord que

$$f_n(t) \to f(t) = t^{x-1}e^{-t} \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet,

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - t/n\right)\right) \to e^{-t}.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0,n]$, on a, d'après la question précédente,

$$0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t} = f(t).$$

La fonction f étant intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la première question, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \Gamma(x).$$

6. On fait le changement de variables $u = t/n$, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^1 t^{x-1}(1-t/n)^n = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du,$$

qui est le résultat voulu.

7. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du = \left[\frac{u^x}{x}(1-x)^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{u^x}{x}(1-u)^{n-1}du.$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}(1-u)^0 du \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.\end{aligned}$$

Exercice 29.

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Correction.

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout x. En effet, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1. Pour cela, on remarque que la fonction

$$g : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t) = \sqrt{t}$ et $u(t) = \frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt \\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f(x) \\ &= \frac{-x+i}{2(x^2+1)}f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f} = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln|f| = \frac{-1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{i}{2}\arctan(x) + K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = C(x^2+1)^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0) = C$. On a par ailleurs

$$f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

en effectuant le changement de variables $t = u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C = \sqrt{\pi}$.

Exercice 30.

Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
2. En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt\right)^{1/\alpha}.$$

Correction.

1. Soit $\phi : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $(t,\alpha) \mapsto f^\alpha(t)$. ϕ est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ et,

$$\forall (t,\alpha) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+, \ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(t,\alpha) = \ln f(t) f^\alpha(t).$$

Cette application est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ et si on fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t,\alpha) \in [0,1] \times [a,b]$,

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(t,\alpha) \right| \leq M$$

puisque $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}$ est continue sur le compact $[0,1] \times [a,b]$. Les constantes étant intégrales sur un intervalle borné, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, et on trouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \ln f(t) f^\alpha(t) dt \text{ en particulier } F'(0) = \int_0^1 \ln f(t) dt.$$

2. On cherche la limite de $F(\alpha)^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right)$. Or, on a

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right) &= \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \alpha F'(0) + o(\alpha)\right)}{\alpha}\right) \\ &= \exp\left(F'(0) + o(1)\right). \end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc

$$\exp\left(F'0)\right) = \exp\left(\int_0^1 \ln f(t) dt\right).$$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31.

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.
2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt.$$

En déduire le sens de variation de F.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+. Démontrer que pour tout $A > 0$ et tout

$x > 1$, on a

$$\ell \geq \int_1^A \frac{dt}{1+t^x}.$$

5. En déduire que $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

Correction.

1. Remarquons pour commencer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On doit juste traiter le problème au voisinage de $+\infty$. Mais, si $x < 0$, t^x tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{1+t^x} \to_{t\to+\infty} 1$$

et l'intégrale impropre ne converge pas au voisinage de $+\infty$. Si $x = 0$, la fonction est constante et son intégrale ne converge pas. Enfin, si $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+t^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x}.$$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, et par comparaison à une fonction positive, l'intégrale est convergente si et seulement si $x > 1$. Autrement dit, le domaine de définition de f est $]1, +\infty[$. Fixons ensuite $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Alors si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^b}.$$

De même, si $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^a}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0, 1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit du théorème de continuité des intégrales à paramètres que f est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Posons $u(x, t) = \frac{1}{1+t^x}$, définie sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$. Alors u admet une dérivée partielle par rapport à x définie sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$ et donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^x \ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue des deux variables. Si on utilise

$$\left|\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\right| \leq \frac{1+t^x}{(1+t^x)^2} = \frac{1}{1+t^x}$$

on trouve que, pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{|\ln t|}{1+t^b}$$

si $t \in]0, 1[$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{|\ln t|}{1+t^a}$$

si $t \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0,1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on déduit du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^x \ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Pour obtenir la formule demandée par l'énoncé, on coupe l'intégrale en deux, entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$, puis on fait le changement de variables $u = 1/t$ dans la première intégrale. Puisque pour tout $t > 1$ et tout $x > 1$,

$$\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) \leq 0$$

on en déduit que f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

3. On va séparer l'étude de l'intégrale entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$. On a d'une part, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+t^x} = 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0,1[$ et tout $x > 0$,

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right| \leq 1$$

et 1 est intégrable sur $]0,1[$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Pour l'intégrale entre 1 et $+\infty$, on peut également utiliser le théorème de convergence dominée, ou plus simplement on peut majorer : pour $x > 1$ et $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$, et on trouve

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} = \frac{1}{x-1}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt = 0.$$

Finalement, on en conclut que F tend vers 1 en $+\infty$.

4. Si F admet une limite ℓ en 1^+, alors puisque F est décroissante, pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) \leq \ell.$$

Mais comme on intègre une fonction positive, on en déduit que, pour tout $A > 1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{1+t^x} dt \leq \ell.$$

5. Faisons tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente. Puisque, pour tout $t \in [1, A]$, $\frac{1}{1+t^x}$ tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque x tend vers 1, et que

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right| \leq 1$$

pour tout $t \in [1, A]$ et $x > 1$, avec 1 fonction intégrable sur le segment $[1, A]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$\int_1^A \frac{dt}{1+t} \leq \ell.$$

Ceci est vérifié pour tout $A > 1$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est positive sur $[1, A]$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$ est convergente. Ceci est faux par comparaison à une intégrale de Riemann divergente. C'est donc que l'hypothèse que F admet une limite finie ℓ en 1^+ est fausse. Mais F est décroissante, et donc admet une limite en 1^+ qui peut être finie ou égale à $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

Exercice 32.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y > x$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?
3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Correction.

1. On pose $F(u) = \int_0^u f(t)e^{-xt}dt$. Alors,

$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = \int_0^X f(t)e^{-xt}e^{-(y-x)t}dt = \int_0^X F'(t)e^{-(y-x)t}dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve :

$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = F(X)e^{-(y-x)X} + (y-x)\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt.$$

Maintenant, F est majorée sur $[0, +\infty[$ (c'est une fonction continue qui admet une limite en $+\infty$). Quand X tend vers $+\infty$, $\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt$ admet donc une limite (l'intégrale est absolument convergente), et $F(X)e^{-(y-x)X}$ converge vers 0. Ainsi, $\int_0^X f(t)e^{-yt}dt$ admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale impropre est convergente.

2. L'ensemble de définition est donc un intervalle non-borné à droite, c'est-à-dire ou bien $]-\infty, +\infty[$, $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.
3. Il s'agit d'une simple application du théorème de convergence dominée : soit M un majorant de $|f|$. Pour $x > 1$, on a

$$|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-t}$$

qui est une fonction intégrable. D'autre part, pour chaque $t > 0$ fixé,

$$\lim_{x \to +\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{x \to +\infty} Lf(x) = 0$.

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$, et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Puisque $f(0) = 0$, le théorème fondamental du calcul intégral nous garantit que

$$f(x) = \int_0^x f'(u)du.$$

Effectuons le changement de variables $u = xt$, $du = xdt$. On obtient

$$f(x) = x \int_0^1 f'(tx)dt,$$

ce qui est le résultat demandé. Mais la formule

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$$

a un sens pour $x = 0$. Montrons que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 0$, la fonction $u : (x,t) \mapsto f'(xt)$ admet une dérivée partielle par rapport à x d'ordre k. De plus, si on fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors puisque $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ est continue, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0,1]$ (partie compacte de $\mathbb{R}^2$),

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq M.$$

Les constantes étant intégrables sur un segment borné, on en déduit que g définit une fonction C^∞.

2. C'est la même méthode, mais on remplace l'utilisation du théorème fondamental du calcul intégral par la formule de Taylor avec reste intégral. On a donc, puisque toutes les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles,

$$f(x) = \int_0^x (x-u)^{n-1} \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} du.$$

On pose encore $u = tx$, de sorte que

$$f(x) = \int_0^1 (x - xt)^{n-1} \frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!} x dt$$

soit

$$g(x) = \int_0^1 (1 - t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!} dt.$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, ceci définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.