Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°20

Partie A

Dénombrabilité et Familles sommables

1. Dénombrabilité

Exercice 1.

Soient deux ensembles E et F.

1. Soit A une partie de $E \cap F$. A est-elle une partie de E ? de F ? En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Soit B un ensemble qui est a la fois contenu dans E et aussi dans F. B est-il contenu dans $E \cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ est inclus dans $\mathcal{P}(E \cup F)$.
4. Donner un exemple simple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 2.

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n;\ n \geq 0\}$;
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. l'ensemble des nombres premiers ;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}$.
2. Soit (u_n) une suite de $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément x_n dans $[0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]$.
3. Pourquoi peut-on extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente vers $\ell \in [0, 1]$?
4. Démontrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4.

Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints. Démontrer que A est nécessairement au plus dénombrable.

Exercice 5.

1. Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. On suppose que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est dénombrable et on note $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une bijection. En considérant $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \notin f(n)\}$, trouver une contradiction.

2. Familles sommables

Exercice 6.

Déterminer si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable où pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(1)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}};\quad (2)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{m-n}};\quad (3)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}};\quad (4)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{mn}};$$

$$(5)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{\max(m,n)}};\quad (6)\ a_{m,n} = \frac{1}{2^{\min(m,n)}};$$

Si c'est le cas, écrire la somme de la famille comme une somme de série (puis déterminer sa valeur si la série est connue !)

Exercice 7.

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Exercice 8.

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Exercice 9.

On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10.

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 11.

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2.** $\left(\dfrac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p\geq 1}$

3. $\left(\dfrac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$, $a,b>0$.

Exercice 12.

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 13.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n) = \#\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}$ le nombre de diviseurs positifs de n.
Montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{2^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \frac{\pi^4}{36}$$

Exercice 14.

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Exercice 15.

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Exercice 16.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis calculer $N(u \star v)$ en fonction de $N(u)$ et de $N(v)$.
3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
4. On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

Partie B

Probabilités discrètes

1. Exercices basiques

Exercice 17.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ où les ε_i sont des réels valant 0 ou 1. On tire au hasard une matrice $M \in \mathcal{E}$ avec équiprobabilité. On considère les événements A="M est diagonale", B="M est triangulaire supérieure et non diagonale", C="M est triangulaire inférieure et non diagonale" et D="M n'est pas triangulaire".

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements précédents.
2. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 18.

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 19.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 20.

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 2/3. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 1/2. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

Exercice 21.

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants :

— A="les deux enfants sont de sexes différents"

— B="l'ainé est une fille"

— C="le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à 1/2.

Exercice 22.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on considère $a \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$P(X_1 \geq a) > 0 \iff \forall n \geq 1,\ P(S_n \geq na) > 0.$$

Exercice 23.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 24.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

Exercice 25.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Exercice 26.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer $P(Y > X)$.

Exercice 27.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z.

Exercice 28.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z.

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
   (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
   (b) En déduire la loi de Z.
2. Méthode 2.
   (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
   (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
   (c) En déduire la loi de Z.

Exercice 29.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 30.

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le

dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut p, avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note G_1 l'évènement "le joueur 1 gagne" et G_2 l'évènement "le joueur 2 gagne".

1. En utilisant le système complet d'événements $(A, \bar{A})$ où A est l'événement "le premier lancer amène un 6", démontrer que $P(G_2) = (1-p)P(G_1)$.
2. Démontrer que $P(G_1) + P(G_2) = 1$.
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.
4. Retrouver le résultat en introduisant les événements A_k="le premier 6 apparaît au k-ème lancer".

Exercice 31.

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pP(X \geq n)$. Déterminer la loi de X.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 32.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 33.

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in]-1,1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Exercice 34.

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 35.

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ change d'état de la manière suivante :

— à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.

— si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.

— si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Écrire un algorithme simulant le fonctionnement de la variable aléatoire X. On supposera que l'on dispose d'une fonction ALEA(a,b) qui simule une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{a, a + 1, \ldots, b\}$.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 36.

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1, 1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que
$$\sum_{n \geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

Exercice 37.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir pile est égale à p. On suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres. Soit $r \geq 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues avant le r-ième pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 38.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On répète un certain nombre de fois le protocole suivant : on tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est noire, on la remet dans l'urne, et on ajoute une boule blanche. On note Y la variable aléatoire correspondant au rang du tirage d'une boule blanche. On convient que $Y = 0$ si les tirages n'amènent jamais une boule blanche.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que l'on réalise au plus trois tirages.
   (a) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. On suppose désormais, et jusqu'à la fin de l'exercice, qu'on répète les tirages jusqu'à obtention d'une boule blanche. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Y.
4. On note A_k l'événement "la k-ième boule tirée est noire". Exprimer l'événement "$Y = k$" en fonction des événements $A_1, \ldots, A_k$.
5. Pour $j \geq 2$, calculer $P(A_j | A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1})$ et $P(\overline{A_j} | A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1})$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de $P(Y = k)$.
7. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$, puis démontrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!} = 1$.
8. Quelle est la probabilité pour que l'on ne tire jamais de boule blanche ?

Exercice 39.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

Exercice 40.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Exercice 41.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$.

Exercice 42.

Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.

1. (a) On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné ?
2. On suppose que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé ?

Exercice 43.

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 44.

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 45.

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(Z = k|X = n)$.
2. En déduire la loi de Z ?
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Exercice 46.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 47.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 48.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 49.

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois.
   (a) Écrire une fonction `simul_lancer()` sous Python qui simule cette expérience.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du premier pile. Quelle est la loi de Y ? Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 50.

On lance une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p. On répète cette expérience de façon indépendante et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient pile.

1. Écrire un algorithme qui simule cette variable aléatoire.
2. Modifier l'algorithme précédent de sorte qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de l'espérance de cette variable aléatoire.

Exercice 51.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer $P(Y > X)$.

Exercice 52.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z.

Exercice 53.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z.

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
   (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
   (b) En déduire la loi de Z.
2. Méthode 2.
   (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
   (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
   (c) En déduire la loi de Z.

Exercice 54.

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k + n | X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
   (b) En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d'épreuves de Bernoulli.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 55.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 56.

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut p, avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note G_1 l'évènement "le joueur 1 gagne" et G_2 l'évènement "le joueur 2 gagne".

1. En utilisant le système complet d'événements $(A, \bar{A})$ où A est l'événement "le premier lancer amène un 6", démontrer que $P(G_2) = (1-p)P(G_1)$.
2. Démontrer que $P(G_1) + P(G_2) = 1$.
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.
4. Retrouver le résultat en introduisant les événements A_k="le premier 6 apparaît au k-ème lancer".

Exercice 57.

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

1. Quelle est la loi de X ?
2. En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs.

Exercice 58.

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
   (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
   (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 59.

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p, où $p \in]0,1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n-$ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Exercice 60.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $Y_1, \ldots, Y_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. Démontrer que $Y_1 + \cdots + Y_r$ a la même loi que X.
3. En déduire l'espérance de X et sa variance.

Exercice 61.

On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $(n, b) \in \mathbb{N}^2$. Les boules sont supposées indiscernables au toucher. On notera $p = n/(n+b)$ et $q = 1 - p = b/(n+b)$. On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans cette urne. Après chaque tirage, la boule piochée est remise dans l'urne. La composition de l'urne est donc identique pour tous les tirages. On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé (Ω, P) permettant d'étudier cette expérience. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera N_k l'événement "obtenir une boule noire au k-ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient d'abord $i \in \mathbb{N}^*$ boules successives d'une même couleur, puis $j \in \mathbb{N}^*$ boules successives de l'autre couleur, puis une boule de la couleur initiale. La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage. Par exemple, l'événement $(X = 4 \cap Y = 2)$ correspond à "obtenir successivement 4 boules noires, puis 2 blanches, puis 1 noire" ou à "obtenir successivement 4 boules blanches, puis 2 noires, puis 1 blanche".

1. Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X = i \cap Y = j)$.
2. En déduire la loi de X, puis la loi de Y.
3. Montrer que X admet une espérance, puis la calculer. Vérifier que $E(X) \geq 2$.
4. Montrer que Y admet une espérance, puis que $E(Y) = 2$.
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = n \cap Y = n) = (pq)^n$, puis en déduire $P(X = Y)$.
6. On note $S = X + Y$. Que vaut $S(\Omega)$? Déterminer la loi de S.

Exercice 62.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de $n \geq 2$ clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. La soirée a été un peu arrosée, et, après chaque essai, le concierge remet la clé dans le trousseau. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
   (a) Quelle est la loi de X (on reconnaitra une loi classique) ?
   (b) Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?
2. Le concierge est en réalité accompagné de Sam, qui n'a pas bu. Sam élimine donc après chaque essai infructueux la clé qui n'a pas convenu. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
   (a) Quelles valeurs peut prendre Y ?
   (b) Déterminer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$.
   (c) On note E_i l'événement "on fait au moins i essais et le i-ème ne convient pas" et S_i l'événement "on fait au moins i essais et le i-ème convient". Déterminer, pour $2 \leq i \leq n$, les probabilités conditionnelles
   $$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1}) \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1}).$$
   (d) En remarquant que l'événement $Y = k$ est égal à $S_k \cap E_{k-1} \cap \cdots \cap E_1$, déterminer la loi de Y.
   (e) Quel est, dans cette situation, le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Exercice 63.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 64.

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Déterminer la loi de X.
3. Soit $Y = X - s + 1$. Démontrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.
5. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d. L'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet l'existence de D_s). Établir que $D_s = S_1 + S_2$, avec

$$S_1 = \sum_{n=s}^{d} (d-n)P(X=n), \ S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n).$$

6. Soit la suite (u_k) définie pour $k \geq 0$ par

$$u_k = \sum_{i=0}^{k} (k-i)(1-p)^i.$$

Démontrer que pour tout $k \geq 0$, $u_{k+1} = (1-p)u_k + k + 1$.
7. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$,

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k.$$

8. En déduire une expression de S_1 en fonction de d et s.
9. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X - d)$. En déduire la valeur de S_2 puis celle de D_s.
10. Démontrer que D_s est minimal pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Exercice 65.

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pP(X \geq n)$. Déterminer la loi de X.

Exercice 66.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n).$$

   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin

que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 67.

Soit $X_0, \ldots, X_k$ des variables aléatoires sur l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit T une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{0, \ldots, k\}$. On suppose que $X_1, \ldots, X_k, T$ sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

1. On suppose que les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_k$ admettent toutes une espérance. Démontrer que Y admet une espérance.
2. On suppose de plus que tous les X_i ont même loi. Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et de $E(T)$.

Exercice 68.

1. Calculer l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ ; sa variance.
2. Calculer l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.