Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°21

Partie A

Probabilités : Espérance, variance et fonctions génératrices

1. Espérance, variance

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$.

Exercice 2.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $Y_1, \dots, Y_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. Démontrer que $Y_1 + \cdots + Y_r$ a la même loi que X.
3. En déduire l'espérance de X et sa variance.

Exercice 3.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de $n \geq 2$ clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. La soirée a été un peu arrosée, et, après chaque essai, le concierge remet la clé dans le trousseau. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
   (a) Quelle est la loi de X (on reconnaitra une loi classique) ?
   (b) Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?
2. Le concierge est en réalité accompagné de Sam, qui n'a pas bu. Sam élimine donc après chaque essai infructueux la clé qui n'a pas convenu. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
   (a) Quelles valeurs peut prendre Y ?
   (b) Déterminer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$.
   (c) On note E_i l'événement "on fait au moins i essais et le i-ème ne convient pas" et S_i l'événement "on fait au moins i essais et le i-ème convient". Déterminer, pour

$2 \leq i \leq n$, les probabilités conditionnelles

$$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1}) \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1}).$$

(d) En remarquant que l'événement $Y = k$ est égal à $S_k \cap E_{k-1} \cap \cdots \cap E_1$, déterminer la loi de Y.

(e) Quel est, dans cette situation, le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Exercice 4.

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Exercice 5.

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$. On suppose que le premier saut est toujours réussi et que, en supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ème saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : « le sauteur a tenté et réussi son k-ème saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Écrire une fonction Python `simulX()` qui simule la variable aléatoire X.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
3. Déterminer $P(X = 1)$.
4. Justifier que «$X = 2$» $= S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $P(X = 2)$.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, $P(X = n) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
6. Démontrer que X admet une espérance, puis calculer cette espérance. On pourra utiliser sans démonstration que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice 6.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair

supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 7.

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p, où $p \in]0, 1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n-$ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Exercice 8.

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Soit $Y = X - s + 1$. Démontrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.
5. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d. L'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet l'existence de D_s). Établir que $D_s = S_1 + S_2$, avec
$$S_1 = \sum_{n=s}^{d} (d - n)P(X = n), \ S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d)P(X = n).$$
6. Soit la suite (u_k) définie pour $k \geq 0$ par
$$u_k = \sum_{i=0}^{k} (k - i)(1 - p)^i.$$
Démontrer que pour tout $k \geq 0$, $u_{k+1} = (1 - p)u_k + k + 1$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$,

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k.$$

8. En déduire une expression de S_1 en fonction de d et s.
9. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X-d)$. En déduire la valeur de S_2 puis celle de D_s.
10. Démontrer que D_s est minimal pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Exercice 9.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n).$$

   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X>n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 10.

Soit $X_0, \ldots, X_k$ des variables aléatoires sur l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit T une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{0, \ldots, k\}$. On suppose que $X_1, \ldots, X_k, T$ sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

1. On suppose que les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_k$ admettent toutes une espérance. Dé-

montrer que Y admet une espérance.

2. On suppose de plus que tous les X_i ont même loi. Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et de $E(T)$.

2. Fonctions génératrices

Exercice 11.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Exercice 12.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 13.

1. Démontrer que toutes les racines (complexes) non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \cdots + X^{12}$ sont simples.
2. Peut-on truquer un dé de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?

Exercice 14.

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

1. Démontrer que le rayon de convergence de G_X est supérieur ou égal à 1.
2. Démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$ et C^∞ sur $]-1, 1[$.
3. Démontrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$, alors X et Y ont même loi.
4. Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
5. On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (m, p). On suppose que X et Y

sont indépendantes. Quelle est la loi de $X+Y$? Retrouver ce résultat autrement que par les fonctions génératrices.

Partie B

Équations différentielles

1. Révisions : Equations différentielles de Sup'

a. Equations différentielles linéaires scalaires du 1er ordre

Exercice 15.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

Exercice 16.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice 17.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ sur $]-1, +\infty[$ (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

Exercice 18.

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

   (b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

   Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $ty' - 2y = t^3$;
2. $t^2 y' - y = 0$;
3. $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 20.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(x \ln x)y' - y = -\frac{1+\ln x}{x}$ sur $]1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$;
2. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$ sur $\mathbb{R}$;

Exercice 21.

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

b. Equations différentielles linéaires scalaires du 2nd ordre à coefficients constants

Exercice 22.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;

3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 23.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$;
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$;
3. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x} + e^{3x}$;
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{x} + xe^{2x}\cos x$;
5. $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin x - 4e^{x}\sin(2x)$;

Exercice 24.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y"-3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 25.

Pour les équations différentielles suivantes, déterminer l'unique fonction solution :

1. $y'' + 2y' + 4y = xe^{x}$, avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.
2. $y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$; on discutera suivant que $m = 0$ ou $m \neq 0$.

2. Spé : systèmes différentiels

Exercice 26.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi

par un système différentiel de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & \omega y' \\ y'' & = & -\omega x' \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 27.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.}\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array}\right. \qquad \textbf{2.}\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y + z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array}\right.$$

Exercice 28.

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1.} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2.} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29.

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1.}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2.}\ A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 30.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Exercice 31.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right.$ **2.** $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) - 3x_2(t). \end{array} \right.$

On donnera les solutions réelles.

Exercice 32.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Exercice 33.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

1. A est antisymétrique ;
2. toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.