Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Partie A

Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$
Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2a + ax + b = x \iff a = 1 \text{ et } b = 2.$$
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x + 2).$$
Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations
$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$
soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction
$$x \mapsto (x - 2)e^x + (x + 2).$$
2. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$
La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A + Bx)e^x, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x) = c\cos(2x) + d\sin(2x)$. On a alors

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (-3c - 4d)\cos(2x) + (4c - 3d)\sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$$\left\{ \begin{cases} -3c - 4d & = 1 \\ 4c - 3d & = 0 \end{cases} \right.$$

On trouve $c = -3/25$ et $d = -4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x \mapsto (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2x) + \frac{2}{25}\sin(2x), \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction.

On va chercher une équation différentielle linéaire du second ordre admettant exactement cette famille de solutions. Pour cela, il suffit de trouver une équation différentielle dont l'équation caractéristique admet 2 et -1 comme racine, c'est-à-dire que l'on souhaite qu'elle se factorise en $(r+1)(r-2) = r^2 - r - 2$. Une équation différentielle qui convient est donc

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Exercice 3.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y" - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).

(c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

(d) En déduire le "portrait robot" de y.

2. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Correction.

1. (a) On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(t).$$

(b) En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t} y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t} z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t} z''(t) - e^{-t} y'(e^t) = e^{-2t}\big(z''(t) - z'(t)\big).$$

En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

(c) Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.

(d) On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

2. On a montré que si y est solution de (E), alors il existe deux réels a, b tels que, pour tout $x > 0$, on a $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto ax^2 + bx \ln x$ est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

Exercice 4.

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Soit P une fonction polynôme non-nulle solution de l'équation, de coefficient dominant $a_n x^n$. Alors $(x^2 - 3)P'' - 4xP + 6P$ est une fonction polynôme de degré au plus n, dont le coefficient

devant x^n est

$$n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = a_n(n^2 - 5n + 6).$$

Ce coefficient doit être nul. Or, $a_n \neq 0$. C'est donc que $n^2 - 5n + 6 = 0$, ou encore que $n = 2$ ou $n = 3$. On cherche donc les polynômes solution sous la forme $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. P est solution de l'équation si et seulement si les coefficients vérifient le système

$$\begin{cases} -18a_3 + 2a_1 & = 0 \\ -6a_2 + 6a_0 & = 0 \end{cases}$$

Les polynômes solution sont donc ceux qui s'écrivent

$$\lambda(x^3 + 9x) + \mu(x^2 + 1).$$

Comme les deux fonctions $x \mapsto x^3 + 9x$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont linéairement indépendantes, on a donc résolu l'équation sur tout intervalle où $x^2 - 3$ ne s'annule pas. Raccordons maintenant les solutions. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe six constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et μ_1, μ_2, μ_3 telles que, si f est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, alors on a

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1(x^3 + 9x) + \mu_1(x^2 + 1) & \text{si } x < -\sqrt{3} \\ \lambda_2(x^3 + 9x) + \mu_2(x^2 + 1) & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ \lambda_3(x^3 + 9x) + \mu_3(x^2 + 1) & \text{si } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Puisque f est C^2 en $\sqrt{3}$, on doit avoir,

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-} f(x) = 12\sqrt{3}\lambda_2 + 4\mu_2 = 12\sqrt{3}\lambda_3 + 4\mu_3 = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x)$$

et

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-} f'(x) = 18\lambda_2 + 2\sqrt{3}\mu_2 = 18\lambda_3 + 2\sqrt{3}\mu_3 = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} f'(x).$$

Cette dernière équation n'apporte pas d'informations supplémentaires, car elle est obtenue en multipliant la première par $\sqrt{3}/2$. Si on calcule une dérivée supplémentaire, on trouve

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-} f''(x) = 6\sqrt{3}\lambda_2 + 2\mu_2 = 6\sqrt{3}\lambda_3 + 2\mu_3 = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} f''(x)$$

qui redonne toujours la même équation. La fonction f est donc C^2 en $\sqrt{3}$ si et seulement si

$$\mu_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \mu_2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_3.$$

En examinant le problème en $-\sqrt{3}$, on tire cette fois comme contrainte

$$\mu_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \mu_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_1.$$

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions f définies comme ci-dessus, où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2$ et λ_3 sont n'importe quel réel, et μ_1, μ_3 sont données par les équations précédentes. En particulier, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x''+(t-1)x'-x=0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$x^2y''-3xy'+4y=x^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0,+\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Correction.

1. Soit P un polynôme solution de (E), et a_nt^n son coefficient dominant. Alors le coefficient dominant de $(t^2+t)P''+(t-1)P'-P$ est $(n(n-1)+n-1)a_nt^n$. Puisque P est solution de (E), il faut donc que $n(n-1)+n-1=0$, ce qui entraine $n=1$. On cherche donc une solution de la forme $P(t)=at+b$. On procède par identification et on trouve facilement que les seules solutions polynômiales sont les polynômes de la forme $P(t)=\lambda(t-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
2. On se ramène à une équation d'ordre 1, en posant $y(t)=\frac{x(t)}{t-1}$ (c'est possible puisqu'on travaille sur $]1,+\infty[$). On obtient donc $x'=(t-1)y'+y$ et $x''=(t-1)y''+2y'$, et donc x est solution de (E) si et seulement si y vérifie

$$(t^2+t)(t-1)y''+\big(2(t^2+t)+(t-1)^2\big)y'=0.$$

On écrit alors $\frac{y''}{y'}$ sous forme d'une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples, et on trouve :

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\frac{-2}{t-1}-\frac{2}{t+1}+\frac{1}{t}.$$

On intègre, et on trouve qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$\ln\big(y'(t)\big)=\ln\left(\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^2}\right)+C.$$

Passant à l'exponentielle, il existe $\lambda>0$ tel que

$$z'(t)=\frac{\lambda t}{(t^2-1)^2}$$

puis intégrant, il existe $\alpha>0$ et $\mu\in\mathbb{R}$ tel que

$$z(t)=\frac{\alpha}{(1-t^2)}+\mu$$

ce qui donne pour solutions de l'équation initiale

$$x(t)=-\frac{\alpha}{t+1}+\mu(t-1).$$

3. La méthode est exactement identique. Cette fois, on trouve qu'un polynôme solution de l'équation homogène est forcément de degré 2, et $x \mapsto x^2$ est solution. On applique la méthode du wronskien de l'ordre en posant $y = x^2 u$. u est solution de

$$xu'' + u' = 1$$

d'où on trouve u et finalement y :

$$y(x) = \lambda x^2 \ln x + \mu x^2 + x^3,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a, b, c, d 4 réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x^2) + b\sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c\cos(x^2) + d\sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A quelle condition sur a, b, c, d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

Correction.

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur a, b, c et d pour que ceci définisse une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La continuité de y en 0 entraîne que $a = c$ puisque

$$a = \lim_{x \to 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x \to 0^-} y(x).$$

De plus, on a

$$y'(x) = -2ax\sin(x^2) + 2bx\cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$

$$y''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2b\cos(x^2) - 4bx^2\sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

De même, on a

$$y''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2d\cos(x^2) - 4dx^2\sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

Remarquons que

$$b = \lim_{x\to 0^+} y''(x) \text{ et } d = \lim_{x\to 0^-} y''(x).$$

Pour que y'' soit continue en 0, il est nécessaire que $b = d$. Réciproquement la fonction $x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$ définit bien une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière solution de (E) de rayon de convergence $R > 0$. On introduit ce développement en série entière dans (E). Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :

$$xy'' - y' + 4x^3 y = -a_1 + 3a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \big(a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3}\big)x^n = 0$$

pour tout $x \in]-R, R[$. L'unicité du développement en série entière entraîne que $a_1 = a_3 = 0$, tandis que, pour tout $n \geq 3$,

$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n-1)(n+1)}a_{n-3}.$$

En réindexant, on trouve, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+4} = -\frac{4}{(n+2)(n+4)}a_n.$$

3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque a_1 et a_3 sont nuls, on trouve que $a_{4p+1} = 0$ et $a_{4p+3} = 0$ pour tout $p \geq 0$.
4. La relation de récurrence nous dit que

$$a_{4p} = -\frac{4}{(4p)(4p-2)}a_{4(p-1)} = \frac{-1}{2p(2p-1)}.$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

De même, on obtient

$$a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que $\frac{R^p}{(2p)!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, pour tout $R \in \mathbb{R}$, on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$. De plus, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{4p} + a_1 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{4p+2} \\ &= a_0\cos(x^2) + a_2\sin(x^2). \end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$, sa somme est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par $\cos(x^2)$ et $\sin(x^2)$. Considérons maintenant une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$. Elle est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe deux constantes a_0 et a_2 telles que

$$y(x) = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) \text{ pour } x > 0.$$

Elle est solution sur $]-\infty, 0[$ et donc il existe deux constantes b_0 et b_2 telles que

$$y(x) = b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) \text{ pour } x < 0.$$

D'après la question préliminaire, y va se prolonger en une fonction de classe C^2 si et seulement si $a_0 = b_0$ et $a_2 = b_2$. Ainsi, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions $x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.

Pour les équations différentielles suivantes :

1. Chercher les solutions développables en séries entières
2. Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode du wronskien
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

1. $xy'' + 2y' - xy = 0$ **2.** $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Correction.

1. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On introduit ceci dans l'équation

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0.$$

On réindexe la troisième somme pour retrouver une somme faisant apparaitre un terme en x^{n-1}. On trouve

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-1} = 0.$$

On en déduit $a_1 = 0$, puis, pour $n \geq 2$,

$$n(n+1)a_n = a_{n-2}.$$

On en déduit que, pour tout entier p, $a_{2p+1} = 0$ alors

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+1)2p} = \cdots = \frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Comme la série entière $\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, on trouve que la fonction

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. On résoud alors l'équation sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ (où on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2) par la méthode du wronskien. Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$. Sachant que f est solution de l'équation, on trouve que y est aussi solution si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$2xf'z' + xfz'' + 2fz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en z', que l'on sait résoudre. Remplaçant f par sa valeur, on trouve

$$2\cosh x z' + \sinh x z'' = 0 \implies \frac{z''}{z'} = -2\frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Il vient

$$z' = \frac{\lambda}{\sinh^2 x}$$

puis

$$z = \frac{\lambda \cosh x}{\sinh x} + \mu.$$

Finalement, toute solution sur $]0, +\infty[$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \mu\frac{\sinh x}{x} + \lambda \cosh x x.$$

Si on cherche maintenant les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut procéder par recollement. Si y est solution sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \mu_1 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_1 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu_2 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_2 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En étudiant la limite de $\cosh x/x$ en zéro, et sachant que y doit être continu en 0, on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. D'autre part, puisque $\sinh x/x \to 1$ en 0, la continuité de y en 0 impose alors que $\mu_1 = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \mu_2$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \mu\frac{\sinh x}{x}$.

2. On recopie la même méthode, en posant $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Si on introduit dans l'équation, on trouve

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

Par identification, on trouve $a_0 = 0$, $a_2 = 2a_1$, puis, pour $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Ainsi, par récurrence, on trouve $a_n = na_1$. Puisque la série entière $\sum_{n\geq 1} nx^n$ a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur $]-1,1[$ (en réalité, sur $]-\infty,1[$). On va ensuite résoudre l'équation sur $]0,1[$, par la méthode du wronskien. Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$. Sachant que f est solution de l'équation, on trouve que y est aussi solution si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en z', que l'on sait résoudre. Remplaçant f par sa valeur, simplifiant par x, et après regroupement, on trouve

$$z'(x-2) = x(1-x)z''.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Ceci s'intègre en

$$z' = \lambda\frac{1-x}{x^2} = \lambda\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

On intègre encore une fois pour trouver z. Quitte à changer λ en $-\lambda$, il vient :

$$z = \lambda\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \mu.$$

Les solutions de l'équation sur $]0,1[$ sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{\mu x + \lambda(1 + x\ln x)}{(1-x)^2}.$$

Si on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut au moins que la fonction ait une limite en 1. Faisons le développement limité du numérateur, en posant $x = 1-h$. Il vient

$$\begin{aligned} N(x) &= \mu(1-h) + \lambda\big(1 + (1-h)\ln(1-h)\big) \\ &= \mu - \mu h + \lambda\big(1 + (1-h)(-h - h^2/2 + o(h^2))\big) \\ &= \mu - \mu h + \lambda\big(1 - h + h^2/2 + o(h^2)\big) \\ &= (\mu+\lambda) - (\mu+\lambda)h + \lambda h^2/2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est h^2, la fonction admet une limite en 1 si et seulement si $\lambda = -\mu$. D'autre part, il faut que la fonction soit dérivable en 0. Mais, du fait de la présence du terme $x\ln x$, dont le taux d'accroissement en 0 tend vers $-\infty$, la fonction ne peut être dérivable que si $\lambda = 0$. Ainsi, la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle !

Exercice 8.

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on considère (E) l'équation différentielle

$$x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$, et on note S l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'objectif de l'exercice est d'étudier les valeurs possibles pour la dimension de S.

1. Rappeler la dimension de S^+ et de S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_{|I}, f_{|J})$. Donner le noyau de φ. En déduire que $\dim S \leq 4$.
3. Dans cette question, on suppose que $a(x) = x$ et que $b(x) = 0$, d'où (E) est l'équation $x^2y'' + xy' = 0$. Déterminer S^+ et S^-. En déduire ensuite S et sa dimension.
4. Dans cette question, (E) est l'équation $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. Déterminer deux solutions sur I de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^-. En déduire S et sa dimension.
5. En s'inspirant de la question précédente, donner un exemple d'équation différentielle du type $x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annulant pas sur I (resp. sur J), on a affaire à une équation différentielle linéaire du second ordre. S^+ et S^- sont alors deux espaces vectoriels de dimension 2.
2. Si $\varphi(f) = 0$, alors f est identiquement nulle sur I et sur J. Par continuité de f, elle est aussi nulle en 0 et donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le noyau de φ est réduit à $\{0\}$. L'application est donc injective. Comme la dimension de l'espace d'arrivée est $\dim(S^+) \times \dim(S^-) = 4$, la dimension de l'espace de départ est nécessairement inférieure ou égale à 4.
3. On pose $z = y'$ et on se ramène à résoudre l'équation $xz' + z = 0$ sur I et sur J. La résolution est la même, les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Par intégration, on trouve que $S^+ = \text{vect}\,(x \mapsto 1, x \mapsto \ln|x|)$. C'est la même description pour S^-. Ainsi, si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle est solution sur I donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x > 0$,
$$y(x) = a \ln|x| + b.$$
De même, elle est solution sur J et il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x < 0$,
$$y(x) = c \ln|x| + d.$$
La fonction admettant une limite en zéro, il est nécessaire que $a = c = 0$ et que $b = d$. Finalement, S est constitué des fonctions constantes et est donc de dimension 1.
4. $x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E) si et seulement si $\alpha(\alpha - 1) - 6\alpha + 12 = 0$. Les solutions sont $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$. Comme les fonction $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont indépendantes et que l'on sait que $\dim(S^+) = \dim(S^-) = 2$, alors on peut conclure que
$$S^+ = \text{vect}\left(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\right).$$
La même description vaut pour S^-. Maintenant, si y est élément de S, en raisonnant comme auparavant, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x > 0$,
$$y(x) = ax^3 + bx^4.$$

De même, il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x < 0$,

$$y(x) = cx^3 + dx^4.$$

Mais alors, pour toutes valeurs de a, b, c, d, la fonction définie ci-dessus et prolongée par continuité en posant $y(0) = 0$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\dim(S) = 4$.

5. L'idée est de trouver une équation différentielle admettant deux solutions du type $x \mapsto x^\alpha$ avec deux valeurs de α négatives, par exemple $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$. Si $x \mapsto x^\alpha$ est solution de $x^2 + axy' + by$, alors on a

$$\alpha(\alpha - 1) + a\alpha + b = 0.$$

Nous, si nous voulons que $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$ soient solutions, nous sommes ramenés à l'équation

$$(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \iff \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \iff \alpha(\alpha - 1) + 4\alpha + 2 = 0.$$

On considère alors l'équation $x^2y'' + 4xy' + 2 = 0$. On a

$$S^+ = \text{vect}\left(x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$$

et on en déduit que $S = \{0\}$ et donc que $\dim(S) = 0$.

Exercice 9.

Soit (E) l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions classiques.
2. A l'aide d'un changement de variables, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ une solution de l'équation développable en série entière. Alors, on a

$$2xy'' - y' + x^2y = -a_1 + 2a_2x + \sum_{i=2}^{+\infty} \big((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2}\big)x^i = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve $a_1 = a_2 = 0$ et la formule de récurrence

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}.$$

On a donc, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$ et

$$a_{3k} = -\frac{1}{3k(6k-3)}a_{3k-3} = -\frac{1}{9k(2k-1)}a_{3k-3}.$$

Par récurrence,

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k}{9^k k!(2k-1)\times(2k-3)\cdots\times 3\times 1}a_0 = \frac{(-1)^k 2^k k!}{9^k k!(2k)!}a_0 = \frac{(-1)^k 2^k}{9^k(2k)!}a_0.$$

Réciproquement, pour tout a_0 dans $\mathbb{R}$, la série entière

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{9^k(2k)!}x^{3k}$$

a pour rayon de convergence $+\infty$ et est solution de l'équation différentielle.
Si on cherche maintenant à identifier à une fonction classique, le terme $\frac{x^{3k}}{(2k)!}$ nous met sur la voie. Cela ressemble au terme général de $\cos(x)$, ou plutôt de $\cos(x^{3/2})$. Comme ceci n'est défini que pour $x > 0$, il faut aussi considérer $\cosh\left((-x)^{3/2}\right)$ pour $x < 0$. Avec une homothétie pour obtenir $\frac{2^k}{9^k}$, on trouve finalement que

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2. La forme de la solution trouvée précédemment nous conduit au changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$ pour $x > 0$, c'est-à-dire à chercher l'équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(x)$. Or,

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'(t)$$

et

$$y''(x) = \frac{1}{2}xz''(t) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}z'(t).$$

On trouve donc

$$2xy'' - y' + x^2 y = x^2 z'' + \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' - \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' + x^2 z = 0.$$

z vérifie donc l'équation différentielle $z'' + z = 0$, et donc $z = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit, la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est donnée par :

$$y(x) = \lambda\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, on pose cette fois $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}$. La fonction $z(t) = y(x)$ vérifie l'équation différentielle $z'' - z = 0$, et donc la solution générale sur $]-\infty, 0[$ est donnée par

$$y(x) = \lambda'\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu'\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

3. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe des constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) \text{ pour } x > 0 \\ \lambda'\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu'\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) \text{ pour } x < 0. \end{cases}$$

Comme y est continue en 0 et que $\lim_{0^+} y = \lambda$ alors que $\lim_{0^-} y = \lambda'$, on en déduit que $\lambda = \lambda'$. D'autre part, pour $x > 0$, on note $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$. On a

$$y_2''(x) = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)\right)'' = -\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour $x \to 0$, ceci tend vers $+\infty$. Or, puisqu'une solution de (E) est de classe C^2, on sait que $y''(x)$ admet une limite (finie) quand x tend vers 0, et que y_1 se prolonge en fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\lim_0 y_1''$ existe (et est finie). Puisque $\lim_{0^+} y'' = \lambda \lim_{0^+} y_1'' + \mu \lim_{0^+} y_2''$, ceci ne peut être fini que si $\mu = 0$. De même, on trouve que $\mu' = 0$. Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont donc celles données par la première question.

Exercice 10.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\phi : E \to E$ par

$$\begin{array}{rcl} \phi(f) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) + tf(t). \end{array}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
2. Faire de même pour ϕ^2.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0.$$

Correction.

1. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour $f \in E$, on a

$$\phi(f) = \lambda f \iff f' + (t - \lambda)f = 0.$$

Par la théorie des équations différentielles linéaires, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. On peut de plus résoudre facilement cette équation. En effet, elle devient

$$\frac{f'}{f} = -t + \lambda \implies \ln|f(t)| = -\frac{t^2}{2} + \lambda t + C$$

et donc l'ensemble des solutions est donné par les multiples de la fonction

$$f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}.$$

Tous les nombres complexes sont donc valeurs propres de ϕ, l'espace propre associé étant la droite vectorielle de direction f_λ.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq 0$, alors il existe un nombre complexe $\mu \neq 0$ tel que $\lambda = \mu^2$. Mais alors, le polynôme $X^2 - \lambda$ se factorise en $(X - \mu)(X + \mu)$. On s'intéresse ici à $\ker(\phi^2 - \lambda Id)$. Par le théorème de décomposition des noyaux (les polynômes $X - \mu$ et $X + \mu$ sont premiers

entre eux car $\mu \neq -\mu$), et donc

$$\ker(\phi^2 - \lambda Id) = \ker(\phi + \mu Id) \oplus \ker(\phi - \mu Id).$$

On en déduit que si $\lambda = \mu^2 \neq 0$, λ est une valeur propre de ϕ^2, d'espace propre de dimension 2 engendré par les deux fonctions f_μ et $f_{-\mu}$. Enfin, si $\lambda = 0$, alors $\phi^2(f) = 0$ équivaut à

$$(f' + tf)' + t(f' + tf) = 0 \iff f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f = 0.$$

Il faut alors résoudre cette équation d'ordre 2. Une façon de procéder est de remarquer que l'on connait déjà une solution, la fonction $y(t) = e^{-t^2/2}$, puisque un élément de $\ker(\phi)$ est nécessairement un élément de $\ker(\phi^2)$. On peut alors en déduire une deuxième solution indépendante par la méthode d'abaissement de l'ordre. Sinon, on peut aussi remarquer que

$$\phi^2(f) = 0 \implies \phi(f) \in \ker(\phi) \implies f' + tf = ae^{-t^2/2}.$$

On résoud alors cette équation du premier ordre, le problème étant de trouver une solution particulière. Mais il est facile de remarquer que la fonction $t \mapsto te^{-t^2/2}$ convient. Finalement, on a aussi prouvé que 0 est une valeur propre de ϕ^2, le sous-espace propre associé étant engendré par les fonctions $t \mapsto e^{-t^2/2}$ et $t \mapsto te^{-t^2/2}$.

3. On a déjà remarqué que
$$\phi^2(f) = f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f.$$
L'équation correspond donc à $\phi^2(y) = -2y$, c'est-à-dire qu'on cherche le sous-espace propre associé à -2 de l'endomorphisme ϕ^2. Les solutions sont donc les fonctions de la forme
$$t \mapsto e^{-t^2/2}(ae^{it\sqrt{2}} + be^{-it\sqrt{2}}),\ a, b \in \mathbb{C}.$$
Si on cherche les solutions réelles, on trouve
$$t \mapsto e^{-t^2/2}\big(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\big),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Partie B

Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 11.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :
$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :
$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$

où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Correction.

1. On a :
$$0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy|.$$
2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore encore en
$$|xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$
On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire
$$|f(x,y)| \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2 + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2} \leq 4\|(x,y)\|_2.$$
Ainsi, si (x,y) tend vers 0, on a $|f(x,y)|$ qui tend vers 0.

Exercice 12.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Correction.

1. On a
$$|f(x,y)| \leq |x|+|y| \leq \|(x,y)\|_1.$$
La limite de f en $(0,0)$ est donc 0.
2. Non ! On a
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x,2x) = -\frac{3}{5}.$$
3. Non !
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = +\infty.$$

Exercice 13.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;

2. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x} \sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.

Correction.

1. On a d'une part
$$f(1/n,0,0) = 0$$
et d'autre part
$$f(1/n,1/n,1/n) = \frac{2/n^2}{6/n^2} = \frac{1}{3}.$$
La limite de f en $(0,0,0)$ ne peut pas exister.
2. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2). Or, x^2+y^2-1 tend vers -1, et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. D'autre part, on a
$$|f_2(x,y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \to 1$ quand $(x,y) \to (0,0)$, et
$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$
On en déduit que $f_2(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$, et donc $f(x,y)$ tend vers $(-1,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$.
3. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \to \frac{1}{2}$ si $t \to 0$. Maintenant, on peut écrire
$$f(x,y) = x\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}.$$
De la remarque précédente, on tire que $\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$
La fonction f est-elle continue en (0,0) ?

Correction.

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t,t) = \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $1/2$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.