

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

Exercices obligatoires : 2 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13

Exercices en groupes :

- exo n°1 Groupe 1 : Maxence ; Daniel ; Tredy ; Constant ;
- exo n°4 Groupe 2 : Adrien ; Thibault ; Camil ; Ernest ;
- exo n°5 Groupe 3 : Lucas ; Clément ; Rayan ; Malarvijy ;
- exo n°11 Groupe 4 : Raphaël ; Michèle ; Ingrid ; Sébastien ;
- exo n°15 Groupe 5 : Luca ; Ambroise ; Augustin ; Maxime ;

1. Exercices basiques

a. Boules / Distances

Exercice 1.

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite u constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergeant vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites à valeurs réelles convergentes.

Correction.

On note 0 la suite constante en 0.

- On a clairement $d(u, c_0(\mathbb{R})) \leq d(u, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit $x = (x_n) \in c_0(\mathbb{R})$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - 1| \leq \|x - u\|_\infty.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$1 \leq d(u, x).$$

Donc $d(u, c_0(\mathbb{R})) \geq 1$.

Il en résulte que $d(u, c_0(\mathbb{R})) = 1$.

- On a clairement $d(v, \mathcal{C}) \leq d(v, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ et l sa limite. On a, pour tout entier pair $n = 2k$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k} - v_{2k}| = |x_{2k} - 1|,$$

et pour tout entier impair $n = 2k + 1$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k+1} - v_{2k+1}| = |x_{2k+1} + 1|.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$|l - 1| \leq d(v, x) \text{ et } |l + 1| \leq d(v, x).$$

Par suite,

$$1 = \left| \frac{1}{2}(1 - l) + \frac{1}{2}(1 + l) \right| \leq \frac{1}{2}|1 - l| + \frac{1}{2}|1 + l| \leq d(v, x).$$

Donc $d(v, \mathcal{C}) \geq 1$.

Il en résulte que $d(v, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.

Remarque : $x + B_f(y, r)$ est l'ensemble $\{x + z \mid z \in B_f(y, r)\}$.

Correction.

On procède par double inclusion.

$$— x + B_f(y, r) \subset B_f(x + y, r).$$

Soit $u \in x + B_f(y, r)$. Alors il existe $z \in B_f(y, r)$ tel que $u = x + z$. On a :

$$d(u, x + y) = \|(x + y) - (x + z)\| = \|y - z\| = d(z, y) \leq r.$$

Donc $u \in B_f(x + y, r)$.

$$— x + B_f(y, r) \supset B_f(x + y, r).$$

Soit $u \in B_f(x + y, r)$. On note $z = u - x$. Alors $u = x + z$ et on a :

$$d(y, z) = \|(u - x) - y\| = \|u - (x + y)\| = d(x + y, u) \leq r.$$

D'où $z \in B_f(y, r)$ et donc $u \in x + B_f(y, r)$.

Il en résulte $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel et $N : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que :

i) N est positive sur E ;

- i) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- iii) pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;

Montrer que N est une norme si, et seulement si, $B_f = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Correction.

Si N est une norme, ses boules sont convexes et B_f étant la boule unité fermée de N , c'est donc une partie convexe.

Réciproquement, supposons B_f est convexe. Tout d'abord, montrons que la "boule fermée" centrée en 0 et de tout rayon sont convexes également.

Soit $r > 0$ et $B_f(r) = \{x \in E \mid N(x) \leq r\}$. Soit $x, y \in B_f(r)$ et $t \in [0, 1]$. Comme $\frac{1}{r}x$ et $\frac{1}{r}y$ sont dans B_f qui est convexe, $\frac{1}{r}(tx + (1-t)y) = t\frac{1}{r}x + (1-t)\frac{1}{r}y \in B_f$. Ainsi, $N(\frac{1}{r}(tx + (1-t)y)) \leq 1$ et donc, par l'axiome iii), $N(tx + (1-t)y) \leq r$ i.e. $tx + (1-t)y \in B_f(r)$. Il en résulte que $B_f(r)$ est convexe.

Montrons alors que N est une norme : vérifions l'inégalité triangulaire. Soit $x, y \in E$ et $r = \frac{1}{2}(N(x) + N(y))$.

Comme x, y sont dans $B_f(r)$ et que $B_f(r)$ est convexe, le vecteur $\frac{1}{2}(x + y)$ appartient à $B_f(r)$ et donc :

$$\frac{1}{2}N(x + y) = N\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \leq r = \frac{1}{2}(N(x) + N(y))$$

D'où $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Par suite, N est une norme sur E .

Exercice 4.

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$ et déterminer $d(0_E, A)$.

Exercice 5.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer $B_f(x, r) = B_f(x', r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

Indication.

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.

Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

Correction.

Il est clair $x = x'$ et $r = r'$ implique $B_f(x, r) = B_f(x', r')$.

Prouvons la réciproque par contraposée. On suppose $(x, r) \neq (x', r')$. Montrons que les boules sont différentes.

1er cas : $x = x'$ et $r \neq r'$. Quitte à échanger r et r' , on peut supposer $r' > r$. Soit u un vecteur unitaire de E (il existe car $E \neq \{0\}$) et $y = x + r'u$. Alors $d(x, y) = \|x - y\| = r'\|u\| = r' > r$ et donc $y \in B_f(x', r')$ et $y \notin B_f(x, r)$. Par suite les deux boules ne sont pas égales. *2eme cas :* $x \neq x'$. Quitte à échanger r et r' , on peut supposer $r' \geq r$. Considérons un élément y sur la droite passant par x et x' tel que x' soit entre x et y et tel qu'il soit assez loin pour ne pas être dans la boule centrée en x . Définissons formellement un tel élément.

Soit u le vecteur unitaire défini par $u = \frac{1}{\|x' - x\|}x' - x$ et on pose $y = x' + r'u$. Comme précédemment, on a $d(x', y) = r'$ et donc $y \in B_f(x', r')$. Or on a :

$$y - x = (x' - x)\left(1 + \frac{r'}{\|x' - x\|}\right),$$

d'où

$$d(x, y) = \left(1 + \frac{r'}{\|x' - x\|}\right)\|x' - x\| = \|x' - x\| + r' > r.$$

Il en résulte que $y \notin B_f(x, r)$.

Dans tous les cas, $B_f(x, r) \neq B_f(x', r')$.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r . On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$. Démontrer que $\|a - b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| > r + s$.

Correction.

Pour comprendre ce type d'exercice, il faut impérativement commencer par réaliser un dessin.

1. La contrainte la plus forte exprimée par l'inclusion $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$ est obtenue pour le point de $\bar{B}(a, r)$ le plus éloigné de b possible. On considère ce point qui est donné par $x = a + r(a - b)/\|a - b\|$. x est dans $\bar{B}(a, r)$, donc dans $\bar{B}(b, s)$. Or

$$x - b = \left(1 + \frac{r}{\|b - a\|}\right)(a - b) \implies \|x - b\| = \|b - a\| + r.$$

Puisque $\|x - b\| \leq s$, on en déduit le résultat recherché.

2. Cette fois, on considère y "le" point de $\bar{B}(a, r)$ le plus proche de b . On a donc $y = a + r(b - a)/\|b - a\|$. Puisque $y \notin \bar{B}(b, s)$, on a $\|y - b\| > s$. Mais on a aussi

$$y - b = \left(1 - \frac{r}{\|b - a\|}\right)(a - b) \implies \|y - b\| = \|b - a\| - r.$$

Ceci donne le résultat voulu.

b. Comparaison de normes

Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|; x \in [0, 1]\}, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont deux normes sur E . Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Correction.

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ est bornée (et atteint ses bornes). Ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien défini pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$. D'autre part, si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout x dans $[0, 1]$, on a $f(x) = 0$, et donc $f = 0$. Étudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de E . Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Passant au max, on obtient :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans E . Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue. Pour la norme $\|\cdot\|_1$: on arrive bien dans $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue. On a donc démontré $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$. D'autre part, pour tout x de $[0, 1]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Intégrer cette inégalité entre 0 et 1 donne l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_1$. En effet, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1 |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Remarquons que, pour chaque x de $[0, 1]$, on a :

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, et on trouve :

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty.$$

Pour $f_n(x) = x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$. Pour $f = f_n$, on obtient :

$$\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 \iff 1 \leq \frac{C}{n+1},$$

et un passage à la limite en n donne $1 \leq 0$.

Exercice 8.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|, \quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2 \right)^{1/2}, \quad N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Correction.

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$. Prenons $P_n = 1 + X + \dots + X^n$. Alors $N_1(P_n) = n+1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand. Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P_n , on a $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$, ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes repose sur le fait que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Correction.

Considérons, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ étaient équivalentes, il existerait $A, B > 0$ tels que, pour tout n ,

$$A \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \leq B.$$

Mais $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et un tel encadrement est impossible (on obtiendrait à la limite $A \leq 0$).

Exercice 10.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n} X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P , ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2 . On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que

$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E .

2. On a

$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2 , mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1 .

3. Les normes ne peuvent pas être équivalentes, sinon une suite convergente pour une norme serait une suite convergente pour l'autre norme.

2. Exercices d'entraînement

a. Norme p d'une autre manière

Exercice 11.

Soient $(x, y, p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $1/p + 1/q = 1$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
 3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}.$$

5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. La fonction $\ln$ est concave, et on a donc :

$$\ln \left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q) = \ln(xy).$$

Il suffit ensuite d'utiliser la croissance de la fonction exponentielle pour en déduire le résultat voulu.

2. Il suffit de sommer les n équations :

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q.$$

3. On pose $\alpha_i = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}}$ et $\beta_i = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1.$$

Il suffit ensuite de remplacer α_i et β_i par leur valeur pour trouver la formule.

4. On décompose $(a_i + b_i)^p$ en $(a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$. Soit q tel que $1/p + 1/q = 1$,

c'est à dire que $pq - q = p$. En appliquant Hölder à chacun des membres, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \right] \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat. Remarquons que le résultat est aussi vrai pour $p = 1$. Dans ce cas, il est juste trivial !

5. L'inégalité précédente se traduit très facilement en disant que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Il est en outre trivial de vérifier que $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ et que $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Comparaison de normes

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Correction.

1. Posons, pour $f, g \in E$, $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f) = \sqrt{\phi(f, f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f, f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Ainsi, $f' = 0$ donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.
2. Soit $x \in [0, 1]$. Alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On applique ensuite (encore!) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que

$$|f(x)| \leq \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2} \times (1^2 + 1^2)^{1/2}.$$

Prenant le sup pour $x \in [0, 1]$, on en déduit bien que

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f).$$

3. Il est facile de vérifier que $\|x^n\|_\infty = 1$ tandis que $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. Ainsi, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

Exercice 13.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E .

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+; \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}.$$

Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.

3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes?

Correction.

1. Soit $f \in \mathcal{L}$. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$. Fixons $a \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + K\|x - a\| \leq \|f(a)\| + K \text{diam}(A).$$

Ainsi, f est bornée.

2. K_f est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.

3. Soit (k_n) une suite de K_f qui converge vers C_f . Alors, pour tous $x, y \in A$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k_n \|x - y\|.$$

On fait tendre n vers l'infini et on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_f \|x - y\|$$

ce qui entraîne bien que $C_f \in K_f$.

4. Fixons $x, y \in A$. Alors on a par l'inégalité triangulaire

$$\|(f + g)(x) - (f + g)(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|.$$

Puisque $C_f \in K_f$ et que $C_g \in K_g$, on a encore

$$\|(f + g)(x) - (f + g)(y)\| \leq C_f \|x - y\| + C_g \|x - y\| \leq (C_f + C_g) \|x - y\|.$$

Autrement dit, $C_f + C_g \in K_{f+g}$ et donc $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.

5. N_a est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $f = 0$, on a $N_a(f) = 0$ et réciproquement, si $N_a(f) = 0$, alors $f(a) = 0$ et pour tout $x \in A$, on a $\|f(x) - f(a)\| \leq 0 \|x - a\|$, soit $f(x) = f(a) = 0$. La fonction est bien identiquement nulle. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}$, alors on a

$$N_a(f + g) = |f(a) + g(a)| + C_{f+g} \leq |f(a)| + |g(a)| + C_f + C_g = N_a(f) + N_a(g).$$

Comme de plus, $C_{\lambda f} = |\lambda| C_f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (pourquoi?), on a également que $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.

6. Par symétrie du rôle joué par a et b , il suffit de trouver une constante $M > 0$ telle que $N_b(f) \leq M N_a(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ et même, en faisant attention à la forme de N_a et de N_b , il suffit de prouver que $|f(b)| \leq M(|f(a)| + C_f)$. Mais,

$$\|f(b)\| \leq \|f(a)\| + \|f(b) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + C_f \|b - a\| \leq \|f(a)\| + \text{diam}(A) C_f \leq M N_a(f)$$

où $M = \max(\text{diam}(A), 1)$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

Exercice 14.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Correction.

1. D'abord, si $N(x, y) = 0$, alors pour tout t , on a $x + ty = 0$. Choisir $t = 0$ montre que l'on a $x = 0$. Ensuite, si on prend $t = 1$, on obtient également $y = 0$, et donc $(x, y) = 0$. L'homogénéité est claire. Enfin, pour tous (x, y) et tous (x', y') , on a

$$|(x + x') + t(y + y')| \leq |x + ty| + |x' + ty'|,$$

en utilisant simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. On en déduit :

$$\frac{|(x+x') + t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x'+ty'|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N(x,y) + N(x',y').$$

Passant au sup, on obtient :

$$N((x,y) + (x',y')) \leq N(x,y) + N(x',y').$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|x+ty| \leq \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N_2(x,y).$$

Pour minorer $N(x,y)$ à l'aide de $N_2(x,y)$, on va donner une valeur particulière au paramètre t . Pour cela, on va (enfin!) étudier la fonction qui à t associe $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, ou plus précisément le carré de cette fonction. On pose donc :

$$f(t) = \frac{(x+ty)^2}{1+t^2}.$$

Le calcul de la dérivée donne, après simplifications :

$$f'(t) = \frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)^2}.$$

Supposons d'abord $x \neq 0$. f est alors maximale pour $t = y/x$. Et si on évalue en y/x la quantité $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, on trouve précisément... $N_2(x,y)$. Si maintenant $x = 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|ty|}{\sqrt{1+t^2}} = |y| = N_2(x,y)$$

et donc $N(x,y) \geq N_2(x,y)$. On vient donc de démontrer que $N(x,y) = N_2(x,y)$, ce qui nous aurait bien simplifié la vie pour les questions précédentes... il suffit de donner par exemple la valeur 1 et la valeur -1 au paramètre t .

3. Voilà une explication, parmi d'autres, au fait que $N = N_2$. La distance (dans le plan muni d'un repère euclidien) du point M de coordonnées (x,y) à la droite d'équation $X+tY=0$ vaut précisément $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$. Cette distance est toujours inférieure à la distance de M à l'origine, qui vaut $N_2(x,y)$. Voilà pourquoi on a $N(x,y) \leq N_2(x,y)$. Cette distance vaut exactement la distance à l'origine lorsque la droite que l'on considère est perpendiculaire à (OM) . C'est ainsi que l'on a $N(x,y) \geq N_2(x,y)$.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Correction.

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si $N_g(f) = 0$, alors $f = 0$. Si N_g n'est pas une norme, alors il existe $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $f \neq 0$, avec $N_g(f) = 0$. Autrement, $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Puisque f est continue et non-nulle, il existe un intervalle I , non réduit à un point, sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que g doit être nulle sur I . Réciproquement, si g s'annule sur un intervalle I non-réduit à un point, alors on peut construire f continue qui s'annule hors de I et tel qu'il existe $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$ (faire un dessin et construire f comme un "pic"). On a donc $f \neq 0$ et $N_g(f) = 0$, donc N_g n'est pas une norme. Par contraposée, on en déduit que N_g est une norme si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.
2. Remarquons déjà que g , continue sur le segment $[0, 1]$, est bornée par une constante $M > 0$. On a donc $N_g(f) \leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. Supposons de plus que g ne s'annule pas. Alors, puisque $|g|$ est continue et atteint ses bornes sur $[0, 1]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors clairement $N_g(f) \geq \delta\|f\|_\infty$ et les deux normes sont équivalentes. Réciproquement, si g s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $M > 0$. On va construire $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $\|f\|_\infty \geq MN_g(f)$. Pour cela, on sait, par continuité de g , qu'il existe un intervalle I , non-réduit à un point, et contenu dans $[0, 1]$, tel que $|g(x)| \leq \frac{1}{M}$ pour tout $x \in I$. Comme à la question précédente, on peut construire f nulle en dehors de I , avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et $f(a) = 1$ pour au moins un a de I . On a alors

$$\|f\|_\infty = 1 \text{ tandis que } N_g(f) = \sup_{x \in I} |g(x)f(x)| \leq \frac{1}{M}.$$

Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.