

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

Exercices à traiter en priorité :

Exercices : 1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ; 11 ; 15.

1. Exercices basiques**a. Connexité par arcs****Exercice 1.**

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Correction.

1. Soit $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Puisque A est connexe par arcs, il existe $f : [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. Puisque B est connexe par arcs, il existe $g : [0, 1] \rightarrow B$ continue telle que $g(0) = b$ et $g(1) = b'$. Mais alors, posons, pour $t \in [0, 1]$, $h(t) = (f(t), g(t))$. Alors h est continue, à valeurs dans $A \times B$ et $h(0) = (a, b)$, $h(1) = (a', b')$. Ainsi, $A \times B$ est bien connexe par arcs.
2. Soit $\phi : A \times B \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto a + b$. Alors ϕ est continue, et $\phi(A \times B) = A + B$. Puisque $A \times B$ est connexe par arcs, il en est de même de $A + B$.
3. Trouvons un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$. Il suffit de prendre pour A la réunion de deux boules disjointes que l'on relie par un segment. Cet ensemble est connexe par arcs. En revanche, l'intérieur, qui est égal à la réunion des deux boules ouvertes, n'est plus connexe par arcs car on ne peut plus passer de l'une à l'autre.

Exercice 2.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction.

Soient $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$. On va construire explicitement un chemin allant de a à b . Soit $c \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et soit i_1, i_2 tel que $a \in A_{i_1}$ et $b \in A_{i_2}$. Alors, puisque A_{i_1} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_1 contenu dans A_{i_1} tel que γ_1 relie a à c . Puisque A_{i_2} est connexe par arcs, il

existe un chemin continu γ_2 contenu dans A_{i_2} tel que γ_2 relie c à b . Alors le chemin constitué de γ_1 suivi de γ_2 est un chemin contenu dans $\bigcup_{i \in I} A_i$ qui relie a à b . Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 3.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$ et $F(x, y) = f(x) - f(y)$, pour $(x, y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Correction.

1. Remarquons d'abord que C est connexe par arcs, car convexe (faire un dessin). Puisque F est continue, $F(C)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle.
2. Puisque f est injective, $0 \notin F(C)$. Puisque $F(C)$ est un intervalle, on a ou bien $F(C) \subset]0, +\infty[$ (et dans ce cas F est strictement croissante), ou bien $F(C) \subset]-\infty, 0[$ (et dans ce cas F est strictement décroissante). Dans tous les cas, on a bien prouvé que F est strictement monotone.

Exercice 4.

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \rightarrow B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0, 1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Correction.

1. $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs. Considérons en effet x et y dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il est facile de voir que l'on peut tracer un arc constitué de deux segments joignant x à y sans passer par l'origine.
2. Procédons par l'absurde et imaginons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ soient homéomorphes. Il existerait alors une bijection $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit continues. Posons $a = f(0, 0)$. Alors $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$ resterait une bijection continue. Mais $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, et $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ne l'est pas (les parties de $\mathbb{R}$ connexes par arcs sont les intervalles).
3. On procède de la même façon, en remarquant que le cercle privé d'un point est connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas de $[0, 1] \setminus \{1/2\}$. En notant $\mathcal{C}$ le cercle unité et $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ une éventuelle bijection continue, on pose $M = f^{-1}(1/2)$ et on remarque qu'on obtient encore une bijection continue entre le connexe par arcs $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ et le non connexe par arcs $[0, 1] \setminus \{1/2\}$.

b. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Correction.

Il suffit de remarquer que E est de dimension finie et que $\int_0^1 |P(t)| dt$ et $\sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ définissent des normes sur E . Elles sont donc équivalentes d'où le résultat.

Exercice 6.

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

Soit $(S_{i,j}(k))$ une suite de matrices symétriques qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers la matrice $S = (S_{i,j})$. Alors tous les entiers $1 \leq i, j \leq n$ et $k \geq 1$, on a $S_{i,j}(k) = S_{j,i}(k)$. Puisque la convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnée par coordonnée, ceci implique en faisant tendre k vers $+\infty$ que $S_{i,j} = S_{j,i}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi, la matrice S est symétrique et l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

Exercice 7.

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Correction.

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice. On peut par exemple prouver que l'inégalité est vraie pour une norme particulière sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis utiliser l'équivalence des normes. Précisément, considérons $N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$. Prenons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = AB$. Alors on a, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \times |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n N_\infty(A) N_\infty(B)$$

ce qui prouve que $N_\infty(AB) \leq n N_\infty(A) N_\infty(B)$. Mais d'autre part, N et N_∞ sont équivalentes.

Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$. On en déduit que

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha} N_\infty(AB) \leq \frac{1}{\alpha} n N_\infty(A) N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha} N(A) N(B).$$

2. Exercices d'entraînement

a. Connexité par arcs

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à deux (éventuellement, de dimension infinie). Démontrer que sa sphère unité $\mathcal{S}_E$ est connexe par arcs.

Correction.

Soit $x, y \in \mathcal{S}_E$. Supposons d'abord que $y \neq -x$. Alors le segment $[x, y]$ ne passe pas par l'origine. Autrement dit, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(1-t)x + ty \neq 0$. On considère alors $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_E$,

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}.$$

Alors γ définit bien un chemin continu sur la sphère tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Supposons maintenant que $y = -x$. Alors, puisque E est de dimension au moins égale à deux, il existe $z \in E$ tel que (x, z) est libre. On définit alors, par le raisonnement précédent, un chemin continu γ_1 sur la sphère de x vers z , puis un chemin continu γ_2 sur la sphère de z à $-x$. La réunion des deux chemins γ_1 et γ_2 donne un chemin continu sur la sphère de x à $-x$.

Exercice 9.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Correction.

1. A est convexe, donc connexe par arcs.
2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x, y) \in A$ tel que

$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que

$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$$

et donc $z \in f'(I)$. D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a, b_n).$$

Mais $g(a, b_n) \in g(A)$, et donc $z \in \overline{g(A)}$.

3. $g(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.

b. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 10.

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice). En outre,

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

Ainsi, cet ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert. Prouvons qu'il est dense. Une matrice M n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \rho$ entraîne que $M - \lambda I$ est inversible. En outre, si $\lambda \rightarrow 0$, $M - \lambda I \rightarrow M$, et donc M est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Correction.

Il suffit de démontrer que L est fermé et borné. D'abord, puisque K est compact, il est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Prenons ensuite $y \in L$. Alors il existe $x \in K$ tel que $\|y - x\| \leq r$. Il vient $\|y\| \leq \|x\| + r \leq M + r$ et donc L est bornée. Soit ensuite (y_n) une suite de L qui converge vers $y \in E$, et prouvons que $y \in L$. Pour chaque entier n , il existe $x_n \in K$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq r$. Puisque K est compact, il existe $x \in K$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers x . Mais alors $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y et de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire en passant à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci prouve que $y \in L$, et donc que L est compact.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Correction.

Soit F un tel sous-espace, et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F . On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_q)$ de E . On considère enfin la norme N sur E :

$$N\left(\sum_{i=1}^q x_i e_i\right) = \max_i |x_i|.$$

Rappelons que, puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, il suffit de prouver que F est fermé relativement à cette norme. Soit $(x(n))$ une suite de F , qui converge vers $x \in E$ pour cette norme. Chaque $x(n)$ s'écrit :

$$x(n) = x_1(n)e_1 + \dots + x_p(n)e_p + x_{p+1}(n)e_{p+1} + \dots + x_q(n)e_q,$$

avec $x_i(n) = 0$ si $i \geq p+1$. On décompose également x sous cette forme :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q.$$

Remarquons maintenant que :

$$|x_i(n) - x_i| \leq N(x(n) - x).$$

Ceci prouve que chaque suite $(x_i(n))$ converge vers x_i (dans un evn de dimension finie, la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée). En particulier, pour $i \geq p+1$, $x_i = 0$ ce qui prouve que $x \in F$.

Exercice 13.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E .

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E \setminus F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$. On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Correction.

1. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, il existe une suite (x_n) de F telle que $\|x_n - a\| \rightarrow d(a, F)$. En particulier, la suite (x_n) est bornée et c'est une suite de l'espace vectoriel normé de dimension finie F . Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in F$. Mais alors, par passage à la limite, on a $\|x - a\| = d(a, F)$.

2. Il est d'abord évident que $\|b\| = 1$. De plus, $d(b, F) \leq \|b - 0\| \leq 1$. De plus, pour tout $y \in F$, on a

$$\|b - y\| = \frac{1}{\|a - x\|} \times \|a - z\|$$

où $z = x + \|a - x\|y \in F$. Ainsi, $\|b - y\| \geq 1$ et donc $d(b, F) \geq 1$.

3. On construit la suite (b_n) par récurrence. On l'initialise avec b_0 un vecteur unitaire, puis si $b_0, \dots, b_{n-1}$ ont été construits, on définit b_n en utilisant le résultat de la question précédente avec $F = \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})$. Bien sûr, $F \neq E$ puisque E est de dimension infinie.
4. Si la boule unité fermée de E était compacte, la suite (b_n) construite à la question précédente aurait une sous-suite convergente. Mais ce n'est pas le cas. En effet, pour tout $n > m$, on a

$$\|b_n - b_m\| \geq d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

On ne peut pas extraire d'une telle suite une suite convergente. Autrement, si $(b_{\phi(n)})$ était une telle suite, on aurait $\|b_{\phi(n+1)} - b_{\phi(n)}\| \rightarrow 0$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E . On souhaite prouver qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A . Pour cela, on note $D = \{r > 0; A \text{ est contenu dans une boule de rayon } r\}$.

- Démontrer que D admet une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée r_0 .
- Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = r_0 + \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
- Démontrer que (x_n) est bornée.
- Conclure.
- On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Donner un exemple d'ensemble borné A pour lequel il existe plusieurs boules de rayon minimum contenant A .
- On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Démontrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant A . On rappelle l'identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Correction.

- D est un ensemble non vide (car A est borné) et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure.
- Par définition de la borne inférieure, il existe $r \in D$ tel que $r_0 \leq r < r_n$. Par définition de D , il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r) \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
- Soit $a \in A$. Alors

$$\|x_n - a\| \leq r_n \leq r_0 + 1.$$

Ainsi, (x_n) est une suite bornée.

- Puisque (x_n) est une suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in E$. Soit $a \in A$. Passant à la limite dans l'inégalité $\|a - x_{\phi(n)}\| \leq r_{\phi(n)}$, on trouve $\|a - x\| \leq r_0$. Ainsi, $D \subset \bar{B}(x, r_0)$, et cette boule est une boule fermée de rayon minimal contenant A .

5. Considérons $A = [0, 1] \times \{0\}$. Une boule contenant A a au moins un rayon égal à $1/2$ (considérer ce qui se passe sur la première coordonnée). Maintenant, si $x = (1/2, 0)$ et $y = (1/2, 1/4)$, alors $A \subset \bar{B}(x, 1/2)$ et $A \subset \bar{B}(y, 1/2)$. Il n'y a pas unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant A .
6. Supposons que $A \subset \bar{B}(x_1, r_0)$ et $A \subset \bar{B}(x_2, r_0)$. Alors, en utilisant l'identité du parallélogramme, on trouve que, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \left\| a - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} \|a - x_1\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x_2\|^2 - \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|^2 \\ &\leq r_0^2 - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4}. \end{aligned}$$

En notant $x = (x_1 + x_2)/2$ et $\rho = \sqrt{r_0^2 - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4}} < r_0$, on a donc $A \subset \bar{B}(x, \rho)$, ce qui contredit la minimalité de r_0 .

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1. Soit $a \in E$. Démontrer qu'il existe une boule $\bar{B}(a, R_a)$ de rayon minimal qui contient A .
2. On pose $R = \inf\{R_a; a \in E\}$. Démontrer qu'il existe $b \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(b, R)$.

En particulier, $\bar{B}(b, R)$ est une boule de E de rayon minimal contenant A .

Correction.

1. On pose $R_a = \sup\{\|x - a\|; x \in E\}$. Alors on a $A \subset \bar{B}(a, R_a)$ et de plus, par définition de la borne supérieure, R_a est le plus petit réel avec cette propriété.
2. Soit (a_n) une suite de E telle que (R_{a_n}) converge vers R . Alors, (a_n) est une suite bornée. En effet, fixons $x_0 \in A$. Alors, pour tout entier n , on a d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|a_n\| \leq \|a_n - x_0\| + \|x_0\| \leq R_{a_n} + \|x_0\| \leq R + 1 + \|x_0\|$$

dès que n est assez grand. Puisque E est de dimension finie, on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain $b \in E$. Mais alors, puisque pour tout $x \in A$, on a pour tout entier n ,

$$\|x - a_{\phi(n)}\| \leq R_{a_{\phi(n)}},$$

on a par passage à la limite

$$\|x - b\| \leq R.$$

Exercice 16.

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Correction.

Il suffit de prouver que cet ensemble est fermé et borné, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2 . Mais cet espace est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé, à savoir I_n , par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$. Il est de plus borné. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie N_∞ et notons f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, si M est orthogonale, f est une isométrie et on a

$$|m_{i,j}| = |\langle f(e_j), e_i \rangle| \leq 1.$$

Enfin, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, s'il l'était, puisque l'application déterminant est continue, l'image de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. Or, il est facile de voir que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M)^2 = 1$ et donc $\det(M) = \pm 1$. De plus, ces deux valeurs sont atteintes, car $\det(I_n) = 1$ et $\det(A) = -1$ où A est la matrice orthogonale diagonale avec -1 pour premier coefficient sur la diagonale, et 0 ailleurs. On a donc $\det(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$, et donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

3. Exercices d'approfondissement

a. Connexité par arcs

Exercice 17.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E , et $f : A \rightarrow F$ une application continue, où F est un espace vectoriel normé. On dit que f est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si A est connexe par arcs et f est localement constante, alors f est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0, 1] \rightarrow A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0, 1]; f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

Correction.

1. Posons $H = \{s \in [0, 1]; f(\phi(s)) = f(a)\}$. Cet ensemble est non vide, car $0 \in H$, majoré, il admet donc une borne supérieure t . De plus, $t \in H$, car il existe une suite (s_n) de H qui tend vers t . On a donc $f(a) = f(\phi(s_n))$ et par passage à la limite, $f(t) = f(a)$. Supposons $t < 1$ et posons $c = \phi(t)$. Alors il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(c, r) \cap A$. Mais alors, par continuité de ϕ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t + \varepsilon < 1$ et $\phi(t + \varepsilon) \in B(c, r)$. Ceci signifie que $t + \varepsilon \in H$, une contradiction avec le fait que t est la borne supérieure de H . Donc $t = 1$.
2. D'après la question précédente, $t = 1$ et $f(b) = f(\phi(1)) = f(a)$. Comme a et b sont arbitraires, c'est bien que f est constante.

Exercice 18.

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A . On pose $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si

$x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \emptyset$ ou $B = A$.

Correction.

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On va prouver que l'image réciproque de O est un ouvert de A . On distingue quatre cas.
 - Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \emptyset$, qui est bien ouvert (relatif de A).
 - Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = B$, qui est bien ouvert (relativement à A).
 - Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = B^c$, qui est bien ouvert relativement à A puisque B est fermé relativement à A .
 - Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$, qui est bien un ouvert relatif de A .
 Ainsi, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, et donc f est continue.
2. Puisque A est connexe par arcs et que f est continue, $f(A)$ est connexe par arcs. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais $f(A) \subset \{0, 1\}$, et il y a donc deux cas possibles : $f(A) = \{0\}$, ce qui signifie que $B = \emptyset$, et $f(A) = \{1\}$, ce qui signifie que $B = A$.

b. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 19.

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'important (et le plus difficile) dans cet exercice est de trouver une bonne caractérisation de ces matrices. Nous allons utiliser la suivante : une matrice est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses déterminants d'ordre $p+1$ sont nuls. On peut commencer par écarter le cas $p = n$, puisque dans ce cas $F_p = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc $p < n$. Pour I, J deux parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $p+1$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on désigne par $M_{I,J}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par $(m_{i,j})_{i \in I, j \in J}$. Alors on a

$$F_p = \bigcap_{I,J} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det(M_{I,J}) = 0\}.$$

Or, les deux applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} g_{I,J} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M_{I,J} \\ \det : \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

On a donc

$$F_p = \bigcap_{I,J} (\det \circ g_{I,J})^{-1}(\{0\}).$$

F_p est donc une intersection d'images réciproques de fermés par une application continue. C'est donc un fermé.

Exercice 20.

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe un voisinage de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonalisable.

Correction.

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque A est trigonalisable, A s'écrit :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On pose, pour tout k :

$$A_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{3}{k} & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dès que k est assez grand, les nombres $\lambda_i + \frac{i}{k}$ sont tous distincts (si $\lambda_i = \lambda_j$, c'est clair, et si $\lambda_i \neq \lambda_j$, ce n'est pas non plus très compliqué à vérifier!). Donc les matrices A_k sont diagonalisables. Et elles tendent évidemment vers A .

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $\|A - M\|_\infty < 1/4$. Alors le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc).$$

Son discriminant est donc

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$

En utilisant que $-1/4 \leq a, d \leq 1/4$, $3/4 \leq c \leq 5/4$ et $-5/4 \leq b \leq 3/4$, on trouve que

$$\Delta \leq \frac{1}{4} - 4 \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{4} - 2 < 0.$$

Ainsi, M n'admet pas de valeurs propres réelles et n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Le résultat de la question précédente est donc faux dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21.

Déterminer l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Correction.

On va prouver que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont disjointes. Pour cela, on va démontrer deux choses :

1. Soit M une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales. Alors M n'est pas dans l'intérieur de $\mathcal{D}$. Autrement dit, on peut trouver une suite de matrice (M_p) qui converge vers M et qui ne sont pas diagonalisables. Soit P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, posons

$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(on peut toujours s'arranger pour que ce soient les deux premières valeurs propres qui sont égales). Alors la suite (M_p) définie par $M_p = PD_pP^{-1}$ converge vers M et chaque M_p n'est pas diagonalisable. Sinon, D_p serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas (la restriction de D_p au sous-espace vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de base n'est pas diagonalisable).

2. Soit M une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Son polynôme caractéristique χ_M est scindé à racines simples. Par continuité de $A \mapsto \chi_A$ et des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients, il existe un voisinage V de M tel que, pour tout $A \in V$, le polynôme χ_A est scindé à racines simples. Autrement dit, A est diagonalisable. Un voisinage de M est contenu dans $\mathcal{D}$, donc M est dans l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Exercice 22.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - Id_E) = \ker(u - Id_E)^2$.
2. En déduire que $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E) = E$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(Id_E + u + \dots + u^{n-1})$. Montrer que u_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers une application v que l'on déterminera.

Correction.

1. Soit $x \in \ker(u - Id_E)^2$, i.e. $u^2(x) = 2u(x) - x$. On prouve par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u^n(x) = nu(x) - (n-1)x.$$

La formule est en effet vérifiée pour $n = 1$, et si elle est vraie au rang n , alors

$$u^{n+1}(x) = nu^2(x) - (n-1)u(x) = n(2u(x) - x) - (n-1)u(x) = (n+1)u(x) - nx.$$

Écrivons ceci sous la forme

$$u^n(x) = n(u(x) - x) - x.$$

Puisque la suite $(u^n(x))$ est bornée (par $\|x\|$), ceci n'est possible que si $u(x) = x$. Donc $x \in \ker(u - Id_E)$ ce qui prouve que $\ker(u - Id_E)^2 \subset \ker(u - Id_E)$. Comme l'autre inclusion est toujours vérifiée, on a égalité.

2. D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que $\ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E) = \{0\}$. En effet, si ceci est vérifié, on aura automatiquement par le théorème du rang que la somme directe $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$ est de dimension $\dim(E)$, et donc est égale à E . Prenons donc $x \in \ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E)$. On peut alors écrire $x = u(y) - y$, et $u(x) = x$. Il vient $u^2(y) = u(x) + u(y) = x + u(y) = 2u(y) - y$ et donc $y \in \ker(u - Id_E)^2$. D'après la question précédente, y est élément de $\ker(u - Id_E)$ et donc $x = 0$.
3. Prenons $x \in E$ et décomposons le en $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$. On a $u(x_1) = x_1$ tandis que, si $x_2 = u(y) - y$, on a

$$u^k(x_2) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

Il vient

$$u_n(x) = x_1 + \frac{1}{n}(u^n(y) - y) \rightarrow x_1$$

lorsque n tend vers $+\infty$ puisque, comme auparavant, la suite $(u^n(y))$ est bornée. Donc, pour chaque x , la suite $(u_n(x))$ converge vers $P(x)$ où P est la projection sur $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - Id_E)$. Mais on veut plus. On veut prouver que $\|u_n - P\| \rightarrow 0$. Introduisons v l'endomorphisme de $\text{Im}(u - Id_E) = F$ induit par u . $v - Id_F$ est inversible (son noyau est restreint à $\{0\}$) et $y = (v - Id_F)^{-1}(x_2)$. Notons aussi Q la projection sur $\text{Im}(u - Id_E)$ parallèlement à $\ker(u - Id_E)$, de sorte que $x_2 = Q(x)$. Le calcul précédent donne alors

$$u_n(x) = P(x) + \frac{1}{n}(u^n(v(Q(x))) - Q(x)).$$

On en déduit :

$$\|u_n(x) - P(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|v\|\|Q\| + \|Q\|) \|x\|$$

i.e.

$$\|u_n - P\| \leq \frac{1}{n} (\|v\|\|Q\| + \|Q\|).$$

Ceci prouve bien que $\|u_n - P\|$ tend vers 0.

Exercice 23.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(K) \subset K$. Montrer que pour tout $u \in H$, on a

$$|\det u| \leq 1.$$

Correction.

On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme usuelle associée à celle de E :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

$\mathcal{L}(E)$ est ainsi un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrons que H est compact :

- H est borné : en effet, fixons $u \in H$ et soit $x \in E$ avec $\|x\| = 1$. Puisque $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(0, \varepsilon) \in K$. Ceci entraîne $\varepsilon x \in K$. Maintenant, puisque u est continue et que K est compact, il existe $M > 0$ tel que $\|u(y)\| \leq M$ si $y \in K$. On en déduit

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(\varepsilon x)\|}{\varepsilon} \leq \frac{M}{\varepsilon} \|x\|.$$

Ainsi, on a prouvé que $\|u\| \leq \frac{M}{\varepsilon}$.

- H est fermé : soit (u_n) une suite de H qui converge vers u . En particulier, pour tout x dans K , la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$. Maintenant, puisque K est compact, donc fermé, $u(x) \in K$, et $u \in H$.

H étant fermé et borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il est compact. Maintenant, l'application déterminant est continue, et l'image de H par cette application est donc bornée dans $\mathbb{R}$. Soit $u \in H$. Puisque $u(K) \subset K \implies u^n(K) \subset u^{n-1}(K) \subset \dots K$, u^n est dans H . Mais la suite $\det(u^n) = \det(u)^n$ est bornée. Ceci n'est possible que si $|\det u| \leq 1$.