

Corrigé de la feuille d'exercices n°9 bis : révisions d'algèbre linéaire de Sup'

Exercices à traiter en priorité :

Exercices : 1 ; 3 ; 9 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 30 ; 39 ; 46 ; 53.

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Résoudre les systèmes linéaires suivants (de préférence avec le pivot de Gauss) :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Correction.

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss. Pour le premier système, on écrit

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 & L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ -y - 3z = -6 & L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -4z = -8 & L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour le second système, on procède de la même façon :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ -2y - 2z = 0 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ -4z = -4 & L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Correction.

Pour le premier système :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -y - 3z + 7t = -3 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, et il y a plus d'inconnues que d'équations. On va donc exprimer certaines inconnues en fonctions des autres. Par exemple, ici, on peut exprimer x et y en fonction de z et t . Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -y - 3z + 7t = -3 \\ z = z \\ t = t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z - 4t - 2 \\ y = -3z + 7t + 3 \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{(2z - 4t - 2, -3z + 7t + 3, z, t); (z, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pour le second système, on écrit

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 & L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ y + z = 5 & L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ 2y + 4z = 14 & L_4 - L_1 \rightarrow L_4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ -z = -2 & L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ 0 = 0 & L_4 - 2L_2 \rightarrow L_4 \end{cases}$$

La dernière relation de compatibilité est vérifiée. On en déduit alors facilement que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(4, 3, 2)\}.$$

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = -2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_3, u(\mathcal{E}_2) = 3\mathcal{E}_2, u(\mathcal{E}_3) = -4\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.

- Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
- Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?
- Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Correction.

- On écrit en colonne $u(\mathcal{E}_i)$. On trouve

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- On commence par calculer $u(x, y, z)$. On a

$$u(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4z \\ 3y \\ 2x + 4z \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(x, y, z) \in \ker(u) \iff \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

On a donc $\ker(u) = \operatorname{vect}(-2, 0, 1)$ et le vecteur $(-2, 0, 1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

- On sait, d'après le théorème du rang, que $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2), u(\mathcal{E}_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2))$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension 2.
- Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\operatorname{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0))$ est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

Exercice 4.

Montrer que $P_1(X) = (X - 1)^2$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = (X + 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

Correction.

On commence par démontrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre : soient a, b et c trois réels tels que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, c'est-à-dire, en développant, $(a + b + c)X^2 + (-2a + 2c)X + (a + c) = 0$.

Puisqu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a + 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

dont on démontre facilement que la seule solution est $a = b = c = 0$. Ainsi, (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Cherchons ensuite les coordonnées de $X^2 + X + 1$ en écrivant $X^2 + X + 1 = aP_1 + bP_2 + cP_3$. Toujours en développant et en identifiant, on obtient maintenant le système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2a + 2c = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a = 1/4$, $b = 0$ et $c = 3/4$.

Exercice 5.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Correction.

1. Utilisant la définition de f , on a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, -1, 0, 1) \\ f(e_2) &= (0, 1, 1, 1) \\ f(e_3) &= (1, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

On sait que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Or, $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ et donc $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2))$. Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est déjà génératrice de $\text{Im}(f)$. De plus, elle est libre car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

2. On a :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases}$$

On en déduit que le vecteur $(-1, -1, 1)$ engendre $\ker(f)$. Comme il est non-nul, c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, on trouve que $\ker(f)$ est de dimension 1, ce que l'on peut aussi obtenir en utilisant le théorème du rang.

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. f n'est pas surjective, car son image n'est pas $\mathbb{R}^4$ tout entier. En effet, la dimension de $\text{Im}(f)$ est 2, et non 4.

Exercice 6.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Correction.

On a $H = \text{vect}((1, 1, 1, 1))$. H est donc un espace vectoriel de dimension 1. Si H était le noyau d'une application linéaire f de E dans F , alors par le théorème du rang on aurait

$$4 = \dim(E) = \dim(H) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + \dim(\text{Im}(f)).$$

Ainsi, on aurait $\dim(\text{Im}(f)) = 3$. Mais $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, sa dimension est au plus 2. On a une contradiction. Donc H n'est pas le noyau d'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 7.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. f est-elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

Correction.

On vérifie facilement que

$$f \circ f(x, y, z) = (2(2x - 2z) - 2(x - z), y, 2x - 2z - x + z) = (2x - 2z, y, x - z) = f(x, y, z).$$

On a donc $f \circ f = f$ et f est une projection, sur $\text{Im}(f)$ et parallèlement à $\ker(f)$. Déterminons une base de $\ker(f)$. On a

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2z &= 0 \\ y &= 0 \\ x - z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \\ z &= z \end{cases}$$

Une base de $\ker(f)$ est donc donnée par le vecteur $u = (1, 0, 1)$. Déterminons ensuite une base de $\text{Im}(f)$. On sait que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Ce n'est pas une base, puisque $f(e_3) = (-2, 0, -1) = -f(e_1)$. Posons ensuite $v = (2, 0, 1) = f(e_1)$ et $w = (0, 1, 0) = f(e_2)$. Alors (v, w) est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et c'est aussi une famille libre : (v, w) est une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ ? Quelle est son image? ϕ est-elle injective? surjective?

Correction.

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sa dérivée nulle si et seulement si elle est constante. Le noyau de ϕ est donc l'ensemble des fonctions constantes. En particulier, ϕ n'est pas injective. D'autre part, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive f qui est donc elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire élément de E . On a alors $\phi(f) = g$, ce qui signifie que $\text{Im}(\phi) = E$. ϕ est surjective.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Correction.

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E . Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q) + (1 - X)(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1 - X)(P' + \lambda Q') \\ &= P + (1 - X)P' + \lambda(Q + (1 - X)Q') \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E , on sait que $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1) = 1, \quad u(X) = 1, \quad u(X^2) = -X^2 + 2X, \quad u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$

On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

3. Écrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculons $u(P)$:

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d.$$

Ainsi, on obtient

$$u(P) = 0 \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ 3a - b = 0 \\ 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = -c \end{cases}$$

Ainsi, $P \in \ker(u) \iff \exists c \in \mathbb{R}, P = c(X - 1)$. Une base de $\ker(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.

4. La réunion des bases de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E . Ceci prouve que $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires.

Exercice 10.

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

Correction.

1. On sait que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_nX + b_n,$$

où $a_nX + b_n$ est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Pour trouver la valeur de a_n et b_n , on évalue l'égalité précédente en les racines de $X^2 - 3X + 2$, c'est-à-dire en 1 et 2. On trouve le système :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

2. Il suffit de remarquer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. Remplaçant dans l'expression de la division euclidienne, on trouve

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Exercice 11.

Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On effectue les opérations suivantes :

$$L_2 - aL_1 \rightarrow L_2, \quad L_3 - a^2L_1 \rightarrow L_3, \quad L_4 - a^3L_1 \rightarrow L_4$$

et A a même rang que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 \\ 0 & 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) \\ 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) & a^2(1 - a^4) \end{pmatrix}.$$

On échange ensuite L_2 et L_4 et on trouve que A a même rang que

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) & a^2(1 - a^4) \\ 0 & 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1 - a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 12.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Correction.

On a

$$f(x, y, z) = 0 \iff x + y - z = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases}.$$

$\ker(f)$ est donc un plan vectoriel, de base (u, v) avec $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 1)$. D'après le théorème du rang, on sait que $\text{Im}(u)$ est de dimension 1. Il est engendré par exemple par le vecteur non nul $w = f(e_1) = (1, -3, -2)$. On remarque que $w = u - 3v$ est élément de $\ker(f)$. Ainsi, $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ et donc $f^2 = 0$. Par suite, $f^n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est elle aussi nulle. Donc $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 13.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective

est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Correction.

1. Puisqu'on a des familles de trois (respectivement deux) vecteurs dans un espace de dimension trois (resp. deux), il suffit de prouver que l'on a des familles libres. Pour (f'_1, f'_2) c'est clair puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour (e'_1, e'_2, e'_3) , si on a une égalité du type $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0$, alors on obtient

$$(b+c)e_1 + (a+c)e_2 + (a+b)e_3 = 0 \iff \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

La famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) et Q la matrice de passage de (f_1, f_2) à (f'_1, f'_2) . Alors on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si B est la matrice de u dans les nouvelles bases, alors la formule du changement de base nous dit que $B = Q^{-1}AP$. Or,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

Soient $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ et $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x, y, z)$ et $v \circ u(x, y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}'_2 := \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 := \{\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathcal{E}'_1 := \mathcal{E}_1$,

$$\mathcal{E}'_2 := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{F}'_1 := \mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_2 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \text{ et } \mathcal{F}'_3 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3.$$

- Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}'_2$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}'_3$.
- Écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}_3$ puis dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$ et enfin celle de v dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_2$.

Correction.

- Remarquons d'abord que u et v sont clairement linéaires. Notons A (resp. B) les matrices de u (resp. v) dans leur base canonique. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$u \circ v$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel AB . $v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel BA . On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u \circ v(x) = (5x - 5z, -5y + 5z, 8x - y - 7z) \text{ et } v \circ u(x, y) = (-x + 7y, -2x - 6y).$$

- Il suffit de vérifier que les deux familles sont libres, puisqu'elles comptent le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace. Pour $\mathcal{B}'_2$, c'est clair puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour $\mathcal{B}'_3$, on traduit une égalité du type $a\mathcal{F}'_1 + b\mathcal{F}'_2 + c\mathcal{F}'_3 = 0$ en

$$(a + b + c)\mathcal{F}_1 + (b + c)\mathcal{F}_2 + c\mathcal{F}_3 = 0 \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

- La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Notons C la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}_3$. Comme on ne change la base que au départ, la formule de changement de base nous donne

$$C = AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons D la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$. Cette fois, on change de base à la fois au départ et à l'arrivée. La formule de changement de base nous donne $D = Q^{-1}AP$. Après

calculs, on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons enfin E la matrice de v dans les nouvelles bases. La formule de changement de base nous donne $E = P^{-1}BQ$ (attention à la place de P et Q !!!). On obtient après calculs :

$$P^{-1} = P \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Correction.

1. On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1} . Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n.$$

Mais $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ 4\lambda + \mu = 7. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 16.

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Correction.

1. Un calcul immédiat montre que $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$. On a ensuite :

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1) & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 + \alpha_1) \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2 + \alpha_1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

2. On pose $P(x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$. Alors si on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, et de coefficient devant x^{n-1} égal à $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.
3. On remarque que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont n racines distinctes de P (puisque dans ce cas le déterminant comporte deux colonnes identiques). On en déduit donc, d'après la question précédente, que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i).$$

4. On évalue la formule précédente en $x = \alpha_n$. En s'aidant des deux premières questions, on démontre par récurrence que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Exercice 17.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Correction.

1. Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A(x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1} + x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$\det(A(x)) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (a_{i,1} + x) \det(A_i)$$

où A_i est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.

2. Soit $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chacun des coefficients. D'après la question précédente, on sait que $D(x) = \lambda x + \mu$ pour des réels λ et μ . De plus, $D(-a)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\alpha_i - a$. D'où

$$D(-a) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a).$$

De même, on a

$$D(-b) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b).$$

λ et μ se déduisent alors facilement par la résolution d'un système 2×2 :

$$\begin{cases} \lambda &= \frac{D(-b) - D(-a)}{a - b} \\ \mu &= \frac{aD(-b) - bD(-a)}{a - b}. \end{cases}$$

Ce qui nous intéresse est la valeur $D(0)$, soit

$$D(0) = \frac{a \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b) - b \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a)}{a - b}.$$

Exercice 18.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Correction.

L'application linéaire associée à M_α est bijective si et seulement si la matrice M_α est inversible, si et seulement si le déterminant de M_α est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant L_3 à L_1 et $2L_3$ à L_2 , on trouve :

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

L'application linéaire associée à M_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 4$.

Exercice 19.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les sous-espaces vectoriels $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$. Démontrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Considérons s la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 et p la projection sur D_1 parallèlement à D_2 . Dessiner les sous-espaces vectoriels D_1, D_2 ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1)$, $\vec{w} = (2, 1)$. Vérifier vos résultats par le calcul.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les sous-espaces vectoriels $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x, z = 0\}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$. Démontrer que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$. Considérons s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et p la projection sur P parallèlement à D . Dessiner les sous-espaces vectoriels D, P ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Vérifier vos résultats par le calcul.

Correction.

D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles ; elles sont donc de dimension 1. De plus, on a clairement $D_1 \cap D_2 = \{(0, 0)\}$ donc D_1 et D_2 sont supplémentaires. De $\dim(D_1 \oplus D_2) = \dim(D_1) + \dim(D_2)$, on tire que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$.

Exercice 20.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$. Montrer que f est la projection sur un plan P parallèlement à une droite D . Donner une équation cartésienne du plan P et un vecteur directeur de D .

Correction.

Notons A la matrice de f dans la base canonique. Alors

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors on vérifie facilement que $A^2 = A$, c'est-à-dire que $f \circ f = f$: f est donc une projection. Pour déterminer ses éléments caractéristiques, on commence par calculer $\ker(f)$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $\ker(f) = \text{vect}(u)$ avec $u = (-2, 1, 2)$. Par le théorème du rang, on sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2. Soit $v_1 = f(e_1) = (-3, 2, 4)$ et $v_2 = f(e_2) = (2, 0, -2)$. Alors (v_1, v_2) est une famille libre contenue dans $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2, donc c'est une base de $\text{Im}(f)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Im}(f) &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = -3\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 4\lambda - 2\mu \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \mu = \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \\ \lambda = \frac{y}{2} \\ z = 2y - x - \frac{3y}{2} \end{cases} \\ &\iff 2x - y + 2z = 0. \end{aligned}$$

f est donc la projection sur le plan $P = \text{Im}(f)$ d'équation $2x - y + 2z = 0$ parallèlement à la droite D de vecteur directeur $u = (-2, 1, 2)$.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul, et $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par A . Démontrer que ϕ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Correction.

Remarquons d'abord que ϕ est linéaire. En effet, si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, alors $\phi(P_1)$ (resp. $\phi(P_2)$) est l'unique polynôme de degré inférieur (strict) au degré de A et tel que

$$P_1 = AQ_1 + \phi(P_1), \quad P_2 = AQ_2 + \phi(P_2),$$

avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$. On a alors

$$P_1 + P_2 = A(Q_1 + Q_2) + (\phi(P_1) + \phi(P_2))$$

avec $\deg(\phi(P_1) + \phi(P_2)) < \deg(A)$, ce qui prouve que $\phi(P_1 + P_2) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$. De la même façon on démontre que $\phi(\lambda P) = \lambda\phi(P)$. Remarquons que $\phi \circ \phi(P) = \phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. En effet,

$$\phi(P) = A \times 0 + \phi(P)$$

avec $\deg(\phi(P)) < \deg(A)$. Ainsi, ϕ est bien une projection. Reste à calculer son noyau et son image. On a $\phi(P) = 0$ si et seulement si P est un multiple de A , et donc

$$\ker(\phi) = \{QA : Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Enfin, si $d = \deg(A)$, on a $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, alors

$$P = 0 \times P + \phi(P),$$

et donc $P = \phi(P) \in \text{Im}(\phi)$. Si A est un polynôme constant, il faut interpréter $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ comme $\{0\}$.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0, q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Correction.

Si (p, q) n'est pas libre, il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, tel que $q = \lambda p$. Alors

$$\lambda p = q = q^2 = \lambda^2 p^2 = \lambda^2 p.$$

On a donc $\lambda^2 = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ puisque $\lambda \neq 0$, ce qui contredit $p \neq q$.

Exercice 23.

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Correction.

Il est clair que $\text{Im}(p_j) = E_j \subset \text{Ker}(p_i)$ ce qui prouve que $p_i \circ p_j = 0$. D'autre part, si $x \in E_i$, on a

$$p_1(x) + \cdots + p_i(x) + \cdots + p_n(x) = 0 + \cdots + x + \cdots + 0 = x.$$

On a $p_1 + \cdots + p_n = \text{Id}_E$ sur chaque E_i , donc sur tout l'espace par "recollement". En effet, tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$.

Exercice 24.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Soit p un projecteur de E . Démontrer que u commute avec p si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par u .

Correction.

Supposons d'abord que $u \circ p = p \circ u$, et prouvons que $\text{ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u . En effet, si $p(x) = 0$, alors $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$ et donc $u(x) \in \text{ker}(p)$. De plus, si $x \in \text{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $u(x) = u \circ p(y) = p(u(y)) \in \text{Im}(p)$. Remarquons que cette implication n'utilise pas du tout le fait que p est un projecteur. Réciproquement, supposons que $\text{ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u , et prouvons que u et p commutent. Prenons $x \in E$. Il se décompose de manière unique en $x = y + z$, avec $y \in \text{ker}(p)$ et $z \in \text{Im}(p)$. En particulier, $p(y) = 0$ et $p(z) = z$. Mais alors, on a d'une part

$$u(p(x)) = u(z)$$

et d'autre part, puisque $u(y) \in \text{ker}(p)$ et $u(z) \in \text{Im}(p)$ par hypothèse :

$$p(u(x)) = p(u(y)) + p(u(z)) = u(z).$$

Ainsi, $u(p(x)) = p(u(x))$ et les deux endomorphismes p et u commutent.

Exercice 25.

Pour chacun des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont en somme directe.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}\}$;
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}\}$.

Correction.

1. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Le but est de savoir si (x, y, z) est nécessairement égal à 0. Pour cela, on remarque que (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ -3y + z &= 0 & L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ -4y - 2z &= 0 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ -3y + z &= 0 \\ -10y &= 0 & L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a bien $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et donc F et G sont en somme directe.

2. On procède de la même façon : soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ -y - z &= 0 & L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ -3y - 3z &= 0 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ y + z &= 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On peut alors finir la résolution de ce système, ou alors remarquer que $(1, 1, -1)$ est solution du système, donc membre de $F \cap G$ qui n'est pas réduit à $\{(0, 0, 0)\}$. Ainsi, F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 26.

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a), \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Correction.

1. Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$. Alors d'une part on a

$$x + y + z + t = 0$$

et d'autre part, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = (2a, -a, 0, a)$ On introduit ceci dans

l'équation précédente, et on trouve

$$2a - a + 0 + a = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0.$$

Ainsi, $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ et on a $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ donc F et G sont en somme directe.

2. On a

$$\begin{aligned} (x - 2a, y + a, z, t - a) \in F &\iff x - 2a + y + a + z + t - a = 0 \\ &\iff a = \frac{x + y + z + t}{2}. \end{aligned}$$

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et posons $a = (x + y + z + t)/2$. Posons également $(x', y', z', t') = (x - 2a, y + a, z, t - a)$. Alors d'après la question précédente, $(x', y', z', t') \in F$. On sait aussi que $(2a, -a, 0, a) \in G$ et que

$$(x, y, z, t) = (x', y', z', t') + (2a, -a, 0, a).$$

Ainsi, on a prouvé que $(x, y, z, t) \in F + G$ et donc que $F + G = E$. En utilisant le résultat de la première question, on conclut que F et G sont supplémentaires.

Exercice 27.

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et on pose

$$F = \text{vect}(u_1 + u_2, u_3), \quad G = \text{vect}(u_1 + u_3, u_4), \quad H = \text{vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

Démontrer que $F \cap G = \{0\}$, que $F \cap H = \{0\}$ et que $G \cap H = \{0\}$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Correction.

On va simplement démontrer que $F \cap G = \{0\}$, les deux autres égalités se prouvant de façon tout à fait similaire. Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe des scalaires a, b, c, d tels que

$$u = a(u_1 + u_2) + bu_3 = c(u_1 + u_3) + du_4 \implies (a - c)u_1 + au_2 + (b - c)u_3 - du_4 = 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) étant libre, on en déduit que

$$a - c = a = b - c = -d = 0,$$

d'où l'on déduit successivement $a = d = 0$, puis $c = 0$, $b = 0$. Ainsi, $u = 0$. On va prouver que la somme $F + G + H$ n'est pas directe en trouvant un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_3 + (u_1 + u_3) + 0 \in F + G + H \\ &= (u_1 + u_2) + 0 + (-u_2) \in F + G + H. \end{aligned}$$

La somme n'est pas directe !

Exercice 28.

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Démontrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) - (ax + b)$ vérifie $f \in F$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction video=Correction de l'exercice en vidéo.

</iframe> [/video]

1. Soit $f, g \in F$. Alors $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 0+0 = 0$ et $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0+0 = 0$. Ainsi, $f+g \in F$. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in F$ et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De la même façon, on prouve que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in F \cap G$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Puisque $f(0) = 0$, on a $b = 0$. Puisque $f(1) = 0$, on a $a \times 1 = a = 0$. Ainsi, $f = 0$ et on a bien $F \cap G = \{0\}$: F et G sont en somme directe.
3. On a $f(0) = h(0) - b = 0$, et donc $b = h(0)$. On a $f(1) = h(1) - (a + b) = h(1) - h(0) - a$, et donc $f(1) = 0$ dès que $a = h(1) - h(0)$.
4. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $a = h(1) - h(0)$, $b = h(0)$ et posons $f(x) = h(x) - (ax + b)$. Alors, d'après la question précédente, $f \in F$. De plus, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) + (ax + b)$$

avec $f \in F$ et $x \mapsto ax + b \in G$. On en déduit que $h \in F + G$ et donc que $F + G = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tenant compte de $F \cap G = \{0\}$, on conclut que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 29.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), \quad u_2 = (1, 0, 2, -1), \quad u_3 = (3, 2, 2, -1), \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

Dire, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$;
2. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$;
3. $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.

Correction.

La correction de l'exercice n'utilise pas la théorie de la dimension. En l'utilisant, il serait possible de donner des réponses plus courtes à certaines questions.

1. Vrai. Appelons $w_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $w_2 = (-1, 1, -4, 2)$. Déjà, nous pouvons observer que $u_3 = 2u_1 + 3u_2$, donc $\text{vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{vect}(u_1, u_2)$. Ensuite nous avons $w_1 = u_1 + u_2$ et $w_2 = u_1 - u_2$, et de manière équivalente, $u_1 = \frac{w_1 + w_2}{2}$ et $u_2 = \frac{w_1 - w_2}{2}$, d'où la conclusion.

2. Vrai. Au point précédent nous avons déjà montré que $(1, 1, 0, 0) = u_1 + u_2$. Montrons que $(1, 1, 0, 0)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_2, u_3, u_4 :

$$(1, 1, 0, 0) = \alpha(1, 0, 2, -1) + \beta(3, 2, 2, -1) + \gamma(0, 0, 1, 0)$$

donne (écrit comme matrice augmentée)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

qui a pour solution $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1/2, 1/2, 0)$.

3. Faux. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_2, u_3, u_4) &= \text{vect}(u_1, u_2, u_2, u_3, u_4) && \text{par construction} \\ &= \text{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \\ &= \text{vect}(u_1, u_2, u_4) && \text{d'après le point 1.} \end{aligned}$$

Voyons si $(1, 0, 0, 0)$ appartient à cet espace :

$$(1, 0, 0, 0) = \alpha(0, 1, -2, 1) + \beta(1, 0, 2, -1) + \gamma(0, 0, 1, 0)$$

donne (écrit comme matrice augmentée)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

puis à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

qui est incompatible (dernière ligne).

Exercice 30.

1. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

Correction.

1. Notons D le déterminant que l'on cherche à calculer. En enlevant la première ligne à toutes les autres, on trouve que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

On a une matrice triangulaire supérieure, et donc $D = -8$.

2. On a d'une part $\det(f^2) = \det(f) \times \det(f) = (\det(f))^2$. D'autre part, on a $\det(-Id_E) = (-1)^n$ où $n = \dim(E)$. Ainsi, $(-1)^n$ doit être le carré d'un réel. Ceci n'est possible que si n est pair.

Exercice 31.

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Correction.

On somme tout sur la première ligne. On obtient une ligne composée de $1+a+b+c$ qu'on peut extraire du déterminant, c'est-à-dire qu'on obtient

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. On obtient alors

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1 et donc $D = 1+a+b+c$.

Exercice 32.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Correction.

L'application linéaire associée à M_α est bijective si et seulement si la matrice M_α est inversible, si et seulement si le déterminant de M_α est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant L_3 à L_1 et $2L_3$ à L_2 , on trouve :

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

L'application linéaire associée à M_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 4$.

Exercice 33.

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Correction.

On commence par faire apparaître des 0 sur la première colonne, puis on transforme la troisième colonne en utilisant la formule

$$\cos 2b - \cos 2a = 2 \cos^2 b - 2 \cos^2 a.$$

On trouve successivement :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2 \cos^2 b - 2 \cos^2 a \\ 0 & \cos c - \cos a & 2 \cos^2 c - 2 \cos^2 a \end{vmatrix}.$$

On obtient alors, en utilisant que $\cos b - \cos a$ (resp. $\cos c - \cos a$) est un facteur commun de la deuxième (resp. troisième) ligne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix} \\ &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 1 & 2(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On fait apparaître un dernier zéro en soustrayant la deuxième ligne à la troisième, puis on développe le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 0 & 2(\cos c - \cos b) \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Remarquer la symétrie (prévisible) entre les variables a, b, c dans cette expression.

Exercice 34.

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Correction.

Notons $D_n(s_1, \dots, s_n)$ ce déterminant. Prouvons par récurrence sur n que, pour tous réels $s_1, \dots, s_n$,

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de n . Si la propriété est vraie au rang $n - 1$, prouvons la au rang n en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

On en déduit que

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, s_3 - s_1, \dots, s_n - s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_n) &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \dots (s_n - s_1 - s_{n-1} + s_1) \\ &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}). \end{aligned}$$

Exercice 35.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$.

Correction.

On a, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= \begin{vmatrix} -x & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &= (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} a_k \Delta_k \end{aligned}$$

où Δ_k est le déterminant suivant :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & -x & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ_k se calcule par blocs (on a une matrice triangulaire supérieure par blocs). De plus, chacun des blocs diagonaux est lui-même triangulaire (inférieur pour le premier, supérieur pour le second). On en déduit que

$$\Delta_k = (-x)^k 1^{n-1-k}$$

et donc que

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} (-1)^k a_k x^k \\ &= (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right). \end{aligned}$$

Exercice 36.

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Correction.

1. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On trouve :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & 0 & \dots \\ c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$

On développe encore le second déterminant par rapport à la première ligne, et on trouve le résultat demandé :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2. On va procéder par récurrence **double**. Précisément, on va prouver par récurrence sur $n \geq 1$ l'hypothèse H_n suivante :

$$H_n : \text{''}\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n} \text{ et } \Delta_{n+1} = \frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}\text{''}.$$

2. Exercices d'entraînement**Exercice 37.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Correction.

On note $\Delta_n(x)$ le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré exactement égal à $2n$. De plus, le terme en x^{2n} ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant x^{2n} est égal à 1. Calculons ensuite $\Delta_n(x)$ en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la première colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de $\Delta_n(x)$, on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x) = 1+x^2, \quad \Delta_2(x) = 1+x^2+x^4, \dots$$

On conjecture que $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$. Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie simultanément aux rangs $n-2$ et $n-1$, la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang n . On obtient donc $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$.

Exercice 38.

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

Correction.

On commence par chercher une base de P et une base de D . On a

$$(x, y, z) \in P \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x - y \end{cases}$$

Autrement dit, si on pose $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, -1)$, alors (u, v) est une base de P . On cherche ensuite une base (ici, un vecteur directeur) de D . Clairement, $(1, -1, 1)$ convient. Puisque P et D sont supplémentaires, (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la projection dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) , alors la matrice recherchée

est PAP^{-1} . Or, on peut écrire P directement,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et, après calculs, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Correction.

La preuve de la linéarité de f est laissée au lecteur. Rappelons que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ avec

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer l'image par f de ces matrices, et de les exprimer dans la base canonique. Mais on a

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{1,1} + 0E_{1,2} + 1E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} - 1E_{1,2} + 0E_{2,1} + 1E_{2,2},$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 2E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2}.$$

La matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation simple liant I_4, U et U^2 .
2. En déduire, pour $k \geq 0$, la valeur de U^k .

Correction.

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. Pour $k \geq 1$, effectuons la division euclidienne de X^k par le polynôme $X^2 - 2X - 3$ (qui est un polynôme annulateur de U). Alors il existe deux réels α_k et β_k et un polynôme Q_k tels que

$$X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k.$$

On détermine α_k et β_k en évaluant cette égalité en les racines de $X^2 - 2X - 3$, c'est-à-dire en -1 et en 3 . On trouve les deux relations :

$$\begin{cases} (-1)^k &= -\beta_k + \alpha_k \\ 3^k &= 3\beta_k + \alpha_k. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$. Maintenant, du fait que $U^2 - 2U - 3I = 0$, l'égalité $X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k$ donne $U^k = \beta_k U + \alpha_k I_4$. On a donc, pour tout $k \geq 0$,

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

où les suites (α_k) et (β_k) ont été déterminées précédemment.

Exercice 41.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\text{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

Correction.

1. Notons $C = A^T$, $D = AA^T$ et cherchons quels sont les coefficients diagonaux de D . On a

$$D_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} c_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2.$$

On en déduit que

$$\text{tr}(AA^T) = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2.$$

On réalise une somme de termes positifs ou nuls, et on demande que la somme est nulle. Tous les termes sont donc nuls et on en déduit que, pour tout $i, k = 1, \dots, n$, on a $a_{i,k} = 0$, c'est-à-dire $A = 0$.

2. Calculons d'abord $AE_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec des 0 partout sauf le coefficient à la i -ème ligne et j -ième colonne qui est égal à 1. Alors,

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

où la seule colonne non-nulle est la j -ième colonne. Le seul coefficient diagonal non nul est donc $a_{j,i}$, et on en déduit que

$$\text{tr}(AE_{i,j}) = \text{tr}(BE_{i,j}) \implies a_{j,i} = b_{j,i}.$$

Comme i et j sont arbitraires dans $\{1, \dots, n\}$, on en déduit que $A = B$.

Exercice 42.

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n , et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} =$

AX_n . En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p \geq 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Correction.

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $X_{n+1} = AX_n$, et par récurrence on en déduit que $X_n = A^n X_0$.

2. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $p \geq 3$, on a alors $N^p = N^3 \cdot N^{p-3} = 0$.

3. Ecrivons que $A = 3I + N$, et remarquons que les matrices $3I$ et A commutent. Il est possible d'appliquer la formule du binôme, qui est très simple puisque $N^p = 0$ dès que $p \geq 3$. On obtient exactement le résultat demandé (il était également possible de procéder par récurrence).

4. On a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_n &= 3^n + 2 \times 3^{n-1}n + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n &= 2 \times 3^n + 7 \times 3^{n-1}n \\ c_n &= 7 \times 3^n. \end{cases}$$

Exercice 43.

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Correction.

Soit A une telle matrice. Alors A s'écrit

$$A = PJ_rQ,$$

où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et J_r est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ avec r fois le chiffre 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Alors,

$$J_r = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$$

et donc $A = \sum_{i=1}^r A_i$ avec $A_i = PE_{i,i}Q$. Chaque A_i est de rang 1 (la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang). D'où le résultat.

Exercice 44.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On dit que ϕ est une transvection si

- $\text{Im}(\phi - \text{Id}_E) \subset \ker(\phi - \text{Id}_E)$;
- $\ker(\phi - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ϕ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un réel non nul.

Correction.

On commence par remarquer que, d'après le théorème du rang, $\text{Im}(\phi - \text{Id}_E)$ est de dimension 1. Soit u_1 un vecteur non nul de ce sous-espace. Il est aussi élément de $\ker(\phi - \text{Id}_E)$. Par le théorème de la base incomplète, on complète la famille libre (u_1) en une base $(u_1, \dots, u_{n-1})$ de $\ker(\phi - \text{Id}_E)$. On considère enfin $v \neq 0$ un vecteur qui n'est pas dans $\ker(\phi - \text{Id}_E)$, de sorte que $(v, u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de E . Étudions la matrice de ϕ dans cette base. D'une part, pour $i = 1, \dots, n-1$, on a $\phi(u_i) = u_i$ et les $n-1$ dernières colonnes sont bien les colonnes demandées. D'autre part, on a $\phi(v) - v \in \text{Im}(\phi - \text{Id}_E)$ et donc il existe $\alpha \neq 0$ (puisque $v \notin \ker(\phi - \text{Id}_E)$) tel que $\phi(v) - v = \alpha u_1$, c'est-à-dire $\phi(v) = v + \alpha u_1$. La première colonne est donc elle aussi conforme à ce que l'on voulait.

Exercice 45.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E)$. On suppose de plus que α et β sont non nuls et que

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1} .
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E)$.
4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

Correction.

1. On remarque que

$$(\beta - \alpha) \text{Id}_E = (f - \alpha \text{Id}_E) - (f - \beta \text{Id}_E).$$

Autrement dit, si $x \in E$, on a $x = y + z$ avec

$$y = (f - \alpha \text{Id}_E)(y_1) \text{ et } y_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} x$$

et

$$z = (f - \beta Id_E)(z_1) \text{ et } z_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}x.$$

2. La relation s'écrit encore

$$f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta Id_E = 0$$

soit

$$f \circ \frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E) = Id_E$$

et

$$\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E) \circ f = Id_E$$

ce qui prouve que f est inversible, d'inverse $\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E)$.

3. On commence par prouver que les espaces vectoriels sont en somme directe. En effet, si $x \in \ker(f - \alpha Id_E) \cap \ker(f - \beta Id_E)$, alors

$$f(x) = \alpha x \text{ et } f(x) = \beta x$$

ce qui prouve que $(\beta - \alpha)x = 0 \implies x = 0$. D'autre part, la relation implique que $\text{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$. Mais dans cette relation, tout commute et on a aussi

$$(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0$$

et donc $\text{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$. Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question pour conclure. En effet, si $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(f - \alpha Id_E)$ et $z \in \text{Im}(f - \beta Id_E)$, alors $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - \beta Id_E)$ et $z \in \ker(f - \alpha Id_E)$.

4. On utilise à nouveau le résultat de la question 1. En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $p(x) = z$ et donc

$$p(x) = (f - \beta Id_E) \left(\frac{1}{\alpha - \beta}x \right).$$

Exercice 46.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Correction.

1. La condition est suffisante. En effet, si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

et donc $p + q$ est un projecteur. Réciproquement, si $p + q$ est un projecteur, alors le calcul précédent donne

$$p \circ q + q \circ p = 0.$$

On a alors :

$$p \circ q = p^2 \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ p = q \circ p.$$

On obtient donc $p \circ q = q \circ p$ et $p \circ q = -q \circ p$, ce qui entraîne $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.

2. Prouvons d'abord que $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe. En effet, si $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, alors $x = p(x)$ et $x = q(x)$ (ce sont des projecteurs) d'où $x = p(x) = p(q(x)) = 0$. D'autre part, il est clair que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Réciproquement, soit $z = p(x) + q(y) \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Alors

$$p(z) = p^2(x) + p \circ q(y) = p(x) \text{ et } q(z) = q \circ p(x) + q^2(y) = q(y).$$

Ainsi, $z = (p + q)(z) \in \text{Im}(p + q)$. Enfin, on a toujours $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p + q)$. Réciproquement, si $p(x) + q(x) = 0$, alors puisque $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe, on a $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 47.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Correction.

Soit $f \in F \cap G$ et prenons $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x+n) = f(x)$ puisque f est 1-périodique. Mais d'autre part, $f(x+n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque f est élément de G . Ainsi, $f(x) = 0$ et puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f = 0$. D'autre part, considérons la fonction $f(x) = x$. Alors si $f \in F + G$, f s'écrit $f = g + h$ avec g périodique de période 1 et h qui tend vers 0 en $+\infty$. Mais alors,

$$f(n) = g(n) + h(n) = g(0) + h(n) \rightarrow g(0) \in \mathbb{R}$$

alors que $f(n) \rightarrow +\infty$. On obtient une contradiction et donc $F + G \neq E$. F et G ne sont pas supplémentaires.

Exercice 48.

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{u \in E; \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{u \in E; \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Correction.

D'abord, il est clair que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si la suite (u_n) est dans l'intersection de F et G , alors tous ses termes d'indice pair sont nuls, et par suite tous ceux d'indice impair sont également

nuls car $(u_n) \in G$. Prouvons maintenant que $F + G = E$. Pour cela, prenons une suite (u_n) de E et réfléchissons un peu. Si $u_n = v_n + w_n$ avec $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$, alors on a forcément $u_{2n} = w_{2n}$ ce qui définit forcément (w_n) puisque $w_{2n+1} = w_{2n}$. La suite (v_n) ne peut être que la différence entre (u_n) et (w_n) , en espérant qu'elle soit dans F . Agissons maintenant ! On définit (w_n) par $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n}$ pour tout entier naturel n . Il est clair que (w_n) est élément de G . Posons ensuite, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - w_n$. Alors par définition on a $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ et il reste à prouver que $(v_n) \in F$. Mais c'est facile, car $v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = 0$. Ainsi, on a bien prouvé par ce raisonnement dit d'analyse-synthèse que $E = F \oplus G$.

Exercice 49.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F .

Correction.

Remarquons que $F = \{AQ; Q \in \mathbb{R}[X]\}$, ce qui permet facilement de prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. D'autre part, prenons maintenant $B \in \mathbb{R}[X]$. D'après la division euclidienne, il s'écrit de façon unique sous la forme $B = AQ + R$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, où d est le degré de A , c'est-à-dire de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$. Ceci signifie exactement que F et $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 50.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F' \oplus G = E$.

Correction.

Prouvons d'abord que F' et G sont en somme directe, c'est-à-dire que $F' \cap G = \{0\}$. Prenons $x \in G \cap F'$. Alors, puisque $F \cap G$ et F' sont en somme directe, et que $x \in F \cap G$ (x est dans G et dans $F' \subset F$), on en déduit $x = 0$. D'autre part, il faut montrer que $F' + G = E$. Soit $z \in E$. On sait que $z = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $F + G = E$). D'autre part, on peut décomposer f en $g' + f'$, avec $g' \in F \cap G$ et $f' \in F'$. Ainsi, on obtient

$$z = g' + f' + g = f' + (g + g')$$

avec $f' \in F'$ et $g + g' \in G : F' + G = E$ ce qui achève la preuve que F' et G sont supplémentaires.

Exercice 51.

Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si $(F \cap G = \{0\})$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$.

Correction.

Prouvons d'abord le sens direct. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0 + 0 = 0 + x + 0$ donne deux décompositions de x dans la somme $F + G + H$ et donc $x = 0$. Choisissons ensuite $x \in (F + G) \cap H$. Alors $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On en déduit que $x = y + z + 0 = 0 + 0 + x$ admet deux décompositions dans la somme $F + G + H$ qui est directe, donc ces deux décompositions coïncident et $x = 0$. Prouvons maintenant la réciproque. Soit $u \in F + G + H$. On suppose que u admet deux décompositions dans cette somme, données par

$$u = x_1 + y_1 + z_1, \quad u = x_2 + y_2 + z_2.$$

Effectuons la différence. On obtient

$$0 = [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)] + (z_1 - z_2)$$

ce qui implique

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = -(z_1 - z_2).$$

Mais $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in F + G$ alors que $-(z_1 - z_2) \in H$. C'est donc que

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0 \text{ et } z_1 - z_2 = 0.$$

En particulier, on en déduit que $z_1 = z_2$ et que $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2)$. Utilisant cette fois que $F \cap G = \{0\}$, on en déduit que $x_1 - x_2 = 0$ et $y_1 - y_2 = 0$. Finalement, on en déduit que u ne peut avoir qu'une unique décomposition dans la somme $F + G + H$. C'est bien que cette somme est directe.

Exercice 52.

Soient $n \geq 1, p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Correction.

Notons Δ_p ce déterminant (de taille $p + 1$), et prouvons que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$ pour tout $p \geq 1$. En effet, on effectue successivement les opérations suivantes :

$$L_p - L_{p-1} \rightarrow L_p, \quad L_{p-1} - L_{p-2} \rightarrow L_{p-1}, \dots, L_2 - L_1 \rightarrow L_2.$$

Clairement, on fait apparaître des zéros dans la première colonne, excepté sur la première ligne. Pour les autres colonnes, le coefficient du déterminant à la i -ème ligne et à la j -ème colonne vaut initialement $\binom{n+i-1}{j-1}$. Après les opérations, il vaut

$$\binom{n+i-1}{j-1} - \binom{n+i-2}{j-1} = \binom{n+i-2}{j-2}$$

où la dernière égalité vient de la formule du triangle de Pascal. Autrement dit, on a prouvé que

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve bien comme annoncé que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$. Puisque $\Delta_0 = 1$, le déterminant recherché est égal à 1.

Exercice 53.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Correction.

1. Cherchons la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a $u(1) = 1$ et pour $j \geq 1$, $u(X^j) = X^j + jX^{j-1}$. Autrement dit, la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure et on en déduit aisément que $\det(u) = 1$.

2. On peut appliquer la même méthode ou remarquer plus simplement que u n'est pas injective, car les polynômes constants sont dans $\ker(u)$. Ainsi, u n'étant pas inversible, $\det(u) = 0$.
3. On calcule toujours la matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque $u(1) = 1$ et $u(X^j) = jX^j + 1$, la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, $\det(u) = n!$.

Exercice 54.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Correction.

Effectuons le calcul demandé. La i -ème ligne de A est

$$(a_{n-i+2} \ \dots \ a_n \ a_1 \ \dots \ a_{n-i+1}).$$

Si on multiplie cette ligne par la j -ième colonne de M , on obtient le coefficient

$$a_{n-i+2} + a_{n-i+3}\omega^{j-1} + \cdots + a_1\omega^{(j-1)(i-1)} + a_2\omega^{(j-1)i} + \cdots + a_{n-i+1}\omega^{(j-1)(n-1)}.$$

Si on factorise ce coefficient par $\omega^{(j-1)(i-1)}$, on trouve qu'il est égal à

$$\omega^{(j-1)(i-1)} \times (a_1 + a_2\omega^{j-1} + \cdots + a_n\omega^{(j-1)(n-1)}).$$

En notant

$$P(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1},$$

on a donc obtenu que la j -ième colonne de AM est égale à la j -ième colonne de M multipliée par $P(\omega^{j-1})$. Ceci entraîne que

$$\det(AM) = P(1)P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) \det(M).$$

Comme d'autre part

$$\det(AM) = \det(A) \det(M)$$

et que le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde), on a :

$$\det(A) = P(1)P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}).$$

Exercice 55.

Soit ϕ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ .

Correction.

$M_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ et $(B_1, \dots, B_q)$ une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$ forme une base de $M_n(\mathbb{R})$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i) = A_i$ tandis que $\phi(B_j) = -B_j$. On a donc $\det(\phi) = (-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 56.

Soit $n \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Correction.

Soit A une telle matrice. Commençons par vérifier que A n'est pas inversible. En effet, en appliquant la formule avec $B = A$, on a $\det(2A) = 2\det(A)$ alors que $\det(2A) = 2^n \det(A)$. Puisque $n \geq 2$, ces deux égalités sont possibles seulement si $\det(A) = 0$, autrement dit si A n'est pas inversible. Supposons maintenant que A n'est pas la matrice nulle. Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A . Alors, une de ces colonnes, disons C_i , est non nulle. On peut alors la compléter en $(E_1, \dots, E_{i-1}, C_i, E_{i+1}, \dots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Notons B la matrice dont les colonnes sont $(E_1 - C_1, \dots, E_{i-1} - C_{i-1}, 0, E_{i+1} - C_{i+1}, \dots, E_n - C_n)$. Alors la matrice B n'est pas inversible car elle contient une colonne nulle et donc $\det(A) + \det(B) = 0$. Mais les colonnes de $A+B$ sont $(E_1, \dots, E_{i-1}, C_i, E_{i+1}, \dots, E_n)$ qui forment une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, $A+B$ est inversible et $\det(A+B) \neq 0$, une contradiction avec $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Ainsi, la seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice nulle.

3. Exercices d'approfondissement**Exercice 57.**

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E . On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E .
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Correction.

1. On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. M est donc la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$.
2. Il suffit de prendre le carré de ces matrices. Il est clair que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$. De plus,

$$(E_{i,i} + E_{i,j})^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 = E_{i,i} + E_{i,j} + 0 + 0.$$

Ceci prouve que $E_{i,i} + E_{i,j}$ est la matrice d'un projecteur.

3. Considérons la famille constituée par les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$, pour $1 \leq i, j \leq n$ et $j \neq i$. Il suffit de démontrer que cette famille est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est constituée de $n + n(n-1) = n^2$ éléments. Il suffit donc de prouver qu'il s'agit d'une famille génératrice. Mais la famille des $(E_{i,j})$ est génératrice et chaque $E_{i,j}$ s'écrit en fonction des éléments précédents : c'est clair pour $E_{i,i}$, et pour $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = (E_{i,i} + E_{i,j}) - E_{i,i}.$$

Exercice 58.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Correction.

On va prouver que le noyau de A est réduit à $\{0\}$. Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas et choisissons $X \in \ker A$. Soit i tel que $|x_i| = \max(|x_j|, j = 1, \dots, n)$. Alors la i -ème ligne de $AX = 0$ se réécrit en

$$a_{i,i}x_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j.$$

Mais,

$$\left| \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}x_i|$$

ce qui est une contradiction. Donc A est inversible.

Exercice 59.

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

Correction.

Remarquons d'abord que si $A = \lambda I_n$, alors A commute avec toutes les matrices et donc A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, supposons que A commute avec toutes les matrices, et étudions ce que donne $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec des 0 partout sauf le coefficient à la i -ème ligne et j -ième colonne qui est égal à 1. Alors,

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

où la seule colonne non-nulle est la j -ième colonne, et

$$E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où la seule ligne non-nulle est la i -ème ligne. Le seul terme (éventuellement) non-nul que peuvent avoir en commun les deux matrices est situé sur la i -ème ligne et la j -ième colonne. Les coefficients correspondants doivent être égaux et donc on doit avoir

$$a_{i,i} = a_{j,j}.$$

Les autres coefficients doivent être nuls, ce qui signifie en particulier, pour $k \neq i$, que $a_{k,i} = 0$. Ainsi, A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux doivent être égaux. On en déduit que $A = \lambda I_n$.

Exercice 60.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\text{rg}(M) = 1$, il existe deux vecteurs colonnes $X, Y \in \mathbb{C}^n$ tels que $M = XY^t$.
2. Montrer que si $\text{rg}(M) = 2$, il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, T) tels que $M = XY^t + ZT^t$.
3. Généraliser aux matrices de rang k .

Correction.

Le point de départ de l'exercice est le suivant. Si $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, alors XY^t est la matrice

$$XY^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 Y^t \\ \vdots \\ \lambda_n Y^t \end{pmatrix}.$$

1. Puisque le rang de M est égal à 1, alors une des lignes de M , disons L_p , est telle que

$$L_i = \lambda_i L_p \text{ pour tout } i. \text{ Posons } X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } Y \text{ tel que } Y^t = L_p. \text{ Alors on vérifie}$$

facilement que $M = XY^t$.

2. Puisque le rang de M est égal à 2, on peut sélectionner deux lignes L_p et L_q telles que, pour chaque i , on a $L_i = \lambda_i L_p + \mu_i L_q$, et les lignes L_p et L_q sont indépendantes. On pose alors $Y^t = L_p, T^t = L_q$ (le couple (Y, T) est bien constitué de deux vecteurs indépendants)

$$\text{et } X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}. \text{ Les vecteurs } X \text{ et } Z \text{ sont aussi indépendants. En effet,}$$

on a $(\lambda_p, \mu_p) = (1, 0)$ et $(\lambda_q, \mu_q) = (0, 1)$. Si $aX + bZ = 0$, en étudiant la p -ième ligne, on trouve $a = 0$, et en étudiant la q -ième ligne, on trouve $b = 0$. De plus, $XY^t + ZT^t = M$, puisque

$$XY^t + ZT^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 Y^t + \mu_1 T^t \\ \lambda_2 Y^t + \mu_2 T^t \\ \vdots \\ \lambda_n Y^t + \mu_n T^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 L_p + \mu_1 L_q \\ \lambda_2 L_p + \mu_2 L_q \\ \vdots \\ \lambda_n L_p + \mu_n L_q \end{pmatrix}.$$

3. Clairement, la même méthode prouve que si le rang de M vaut k , il existe deux couples de k vecteurs indépendants $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_k)$ tels que

$$M = X_1 Y_1^t + \dots + X_k Y_k^t.$$

Exercice 61.

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n m_{j,i} = \sum_{i=1}^n m_{i,i} = \sum_{i=1}^n m_{i,n+1-i}.$$

On note $MG(n)$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n .

1. Que signifie être une matrice magique ?
2. Montrer que $MG(n)$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : MG(n) \rightarrow \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$, qui envoie la matrice M qui s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} & & & & m_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & M_1 & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

sur $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

4. En déduire la dimension de $MG(n)$.

Correction.

1. La condition signifie que les sommes des coefficients de toutes les lignes, de toutes les colonnes, et des deux diagonales de la matrice sont égales.
2. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $MG(n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'application ϕ est clairement linéaire. Pour prouver que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel, on va prouver directement qu'il est bijectif (on ne connaît pas la dimension de l'espace de départ, impossible de se contenter de l'injectivité de ϕ). Soit donc $(A, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$ et on cherche une matrice M de $MG(n)$ vérifiant $\phi(M) = (A, a_1, \dots, a_{n-2})$. On sait déjà ce que vaut $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$. On sait aussi ce que doit valoir $m_{1,n}$ ainsi que $m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2}$. Cherchons les autres coefficients, et notons $S = \sum_{i=1}^n m_{1,i}$ (valeur déjà déterminée). Puisqu'on connaît tous les coefficients de la j -ième ligne, avec $j \leq n-2$, sauf $m_{j,n}$, et que la somme des coefficients de la ligne doit valoir S , on détermine uniquement $m_{j,n}$ (qui vaut $S - \sum_{i < n} m_{j,i}$). On connaît aussi tous les coefficients de la première colonne, sauf $m_{n,1}$, et on sait que la somme fait S : ceci détermine uniquement $m_{n,1}$. On connaît ensuite tous les coefficients de la diagonale en bas à gauche vers en haut à droite sauf $m_{n-1,2}$. Ceci détermine uniquement ce coefficient (puisque la somme doit valoir S). On peut alors répéter le processus pour toutes les colonnes de la 2-ème à la $n-2$ -ème : ceci détermine uniquement $m_{n,i}$ pour $i \leq n-2$. Reste à déterminer les quatre derniers coefficients, $m_{n-1,n-1}$, $m_{n-1,n}$, $m_{n,n-1}$ et $m_{n,n}$. Notons S_1 et S_2 la somme des coefficients déjà connus sur la colonne $n-1$ et sur la colonne n , S_3 et S_4 les sommes des coefficients déjà connus sur les lignes $n-1$ et n et S_5 la somme des coefficients déjà connus sur la diagonale principale. Une matrice magique

solution doit vérifier le système d'équation :

$$\begin{cases} m_{n-1,n-1} + m_{n-1,n} = S - S_1 \\ m_{n,n-1} + m_{n,n} = S - S_2 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n-1} = S - S_3 \\ m_{n-1,n} + m_{n,n} = S - S_4 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n} = S - S_5. \end{cases}$$

Cela nous fait cinq équations pour quatre inconnues...mais une équation est en trop. En effet, si on fait $L1 + L2 - L3$, on trouve à gauche $m_{n-1,n} + m_{n,n}$, comme dans le membre de gauche de $L4$. Pour la partie droite, on trouve :

$$\begin{aligned} S - S_1 - S_2 + S_3 &= S - \sum_{i=1}^{n-2} (m_{n-1,i} + m_{n,i}) + S_3 \\ &= S - \sum_{i=1}^{n-2} (S - \sum_{j=1}^{n-2} m_{j,i}) + S_3 \\ &= S - ((n-2)S - \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} m_{j,i} - \sum_{j=1}^{n-2} m_{j,n-1}) \\ &= S - \sum_{j=1}^{n-2} (S - \sum_{i=1}^{n-1} m_{j,i}) \\ &= S - \sum_{j=1}^{n-2} m_{j,n} = S_4. \end{aligned}$$

L'équation $L4$ est donc redondante puisqu'égal à $L1 + L2 - L3$. On peut donc l'éliminer du système d'équations, et on prouve facilement que ce système de quatre équations à quatre inconnues a une unique solution. Ceci conclut quant à la bijectivité de ϕ .

4. Puisque ϕ est un isomorphisme d'espace vectoriel, on a

$$\dim(MG(n)) = \dim(\mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}) = n(n-2).$$

Exercice 62.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ trois fonctions continues sur I , à valeurs réelles, et pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_1, a_2, a_3 non tous nuls tels que la fonction

$$\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$$

admette au moins trois racines distinctes x_1, x_2, x_3 . Prouver qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) + \lambda_3\theta_k(x_3) = 0,$$

pour $k = 1, 2$ ou 3 .

Correction.

Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) & \theta_3(x_1) \\ \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) & \theta_3(x_2) \\ \theta_1(x_3) & \theta_2(x_3) & \theta_3(x_3) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, les colonnes de cette matrice sont liées. Les lignes le sont donc aussi, et il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$. Ceci donne le résultat. La difficulté de cet exercice repose donc sur sa formulation un peu alambiquée, et aussi de sa position dans le problème (d'analyse) dont il est extrait.

Exercice 63.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Correction.

Remarquons d'abord que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si f est élément de $F \cap G$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a à la fois $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, d'où $f(x) = -f(x)$ ce qui entraîne $f(x) = 0$. D'autre part, tout élément h de E se décompose sous la forme $h = f + g$, avec f dans F et g dans G . Pour cela, on utilise un raisonnement par analyse-synthèse. Admettons un bref instant que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = f(x) + g(x)$ et $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$. Des deux équations précédentes, on tire facilement que $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$ et $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$. On peut désormais passer à la synthèse (le paragraphe précédent peut être considéré comme une recherche "au brouillon"). On pose $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$ et $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$. Alors on vérifie facilement que :

- $h = f + g$;
- f est paire : en effet $f(-x) = (h(-x) + h(-(-x)))/2 = (h(x) + h(-x))/2 = f(x)$;
- g est impaire (même raisonnement).

Ainsi, on a bien $F + G = E$. Remarquons que la partie 'analyse' du raisonnement montre aussi l'unicité de la décomposition, et redémontre donc que la somme est directe.

Exercice 64.

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Correction.

On commence par fixer G un supplémentaire de F . Soit x un vecteur qui n'est ni dans F , ni dans G (par exemple, si $x_1 \neq 0 \in F$ et $x_2 \neq 0 \in G$, alors $x_1 + x_2$ n'est ni dans F - sinon x_2 serait dans F , ni dans G - sinon x_1 serait dans G). Posons $F' = F \oplus \text{vect}(x)$ et considérons G' un supplémentaire de F' dans E . Alors, $G_1 = \text{vect}(x) \oplus G'$ est un supplémentaire de F dans E . En effet

- si $z \in E$, alors il s'écrit sous la forme $z = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in F'$ et $y_2 \in G'$. De plus, y_1 s'écrit sous la forme $\lambda x + u$, avec $u \in F$. Finalement, $z = u + (\lambda x + y_2)$, avec $u \in F$ et $\lambda x + y_2 \in G_1$.
- si $z \in F \cap G_1$, alors $z = \lambda x + u$ avec $u \in G'$ et donc $u = z - \lambda x \in G' \cap F'$. Puisque F' et G' sont en somme directe, on a $u = 0$. On en déduit que $z - \lambda x = 0$ soit, puisque $x \notin F$, $z = 0$ et $\lambda = 0$. Finalement, on a prouvé que $F \cap G_1 = \{0\}$.

Bien sûr, $G_1 \neq G$ puisque $x \in G_1 \setminus G$.

Exercice 65.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a . Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E .
2. Plus généralement, soient $a_0, \dots, a_N$ des éléments distincts de $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in E; f(a_0) = \dots = f(a_N) = 0\}$. Trouver un supplémentaire à G .

Correction.

1. On remarque d'abord que $F \cap G_a = \{0\}$ (une fonction constante qui s'annule en un point est forcément identiquement nulle). Ensuite, prenons $h \in E$, on doit prouver que h se décompose sous la forme $h = g + C$, où C est une constante et $g(a) = 0$. Admettons que ce soit le cas. Alors, nécessairement, $h(a) = C$ et $g(x) = h(x) - C = h(x) - h(a)$. On pose donc $C = h(a)$ et $g(x) = h(x) - h(a)$. Clairement, $h = g + C$ et $g(a) = 0$ ce qui prouve que $g \in G_a$.
2. On va prouver que G et $\mathbb{R}_N[X]$ sont supplémentaires. Pour cela, il suffit de prouver que toute fonction $h \in E$ se décompose uniquement sous la forme $h = g + P$, avec $g \in G$ et $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Unicité. Si $h = g + P$, alors, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, on a $P(a_i) = h(a_i)$. Or, par la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange (par exemple), on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$ qui vérifie cette propriété. D'où l'unicité de P et par suite celle de g puisque $g = h - P$. Existence. Considérons P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $P(a_i) = h(a_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$ (un tel polynôme existe). De plus, on pose $g = h - P$. Alors $g(a_i) = P(a_i) - h(a_i) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, N$ et donc $g \in G$, et bien sûr $h = g + P$.