Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°12

1. Encore de la réduction pratique + sous-espaces caractéristiques

Exercice 1.

Réduire (i.e. diagonaliser/trigonaliser) les matrices suivantes et déterminer leurs sous-espaces caractéristiques :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -1 & 8 & -1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 2 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -1 & 8 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Correction.

A)

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_4(A) = E_4(A); \quad C_8(A) = E_8(A).$$

B)

$$B = PTP^{-1} \text{ où } T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_3(A) = M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

C)

$$C = PTP^{-1} \text{ où } T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_8(C) = E_8(A); \quad C_4(C) = \operatorname{Ker}\left((C - 4I_3)^2\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right);$$

D)

$$D = PTP^{-1} \text{ où } T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_3(D) = M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

E)

$$E = PTP^{-1} \text{ où } T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_3(E) = M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

2. Réduction et polynômes annulateurs

Exercice 2.

Soit M une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

Correction.

On commence par remarque que, pour tout $n \geq 1$, M^n a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout polynôme R, on a

$$R(M) = \begin{pmatrix} R(A) & * \\ 0 & R(B) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } Q(M) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors aisément que $PQ(M) = P(M)Q(M) = 0$.

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

2. Déterminer une telle famille.

Correction.

1. L'endomorphisme $P(X) \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{C}[X]$ induit un endomorphisme u de $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Notons
$$\chi(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$
son polynôme caractéristique. Puisque $u^k(P)$ est égal à $P(X+k)$, on a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :
$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \qquad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. L'endomorphisme $\Delta = u - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent et vérifie $\Delta^n = 0$ puisque pour P non constant, $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$. On a donc
$$0 = (u - \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k.$$
Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$$
Ainsi, on peut choisir $a_k = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Exercice 4.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A et Q celui de A^{-1}. Quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Correction.

On écrit, pour $\lambda \neq 0$,
$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^{-1}) \\
&= \det(A^{-1}(\lambda A - I_n)) \\
&= \det(A^{-1}) \det(\lambda A - I_n) \\
&= \det(A^{-1}) \det(-\lambda(\lambda^{-1} I_n - A)) \\
&= \det(A^{-1})(-\lambda)^n \det(\lambda^{-1} I_n - A) \\
&= \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} P(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}\ \text{et}\ D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Correction.

On va utiliser plusieurs méthodes. Pour A, on remarque que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. Son polynôme minimal ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X-1$ car si A serait égale à I_2 donc son polynôme minimal est $(X-1)^2$. Pour B, on remarque que $B^2=3B$ et donc $B^2-3B=0$. Comme B n'est pas un multiple de l'identité, on en déduit que son polynôme minimal est X^2-3X. Pour C, nous allons utiliser le fait qu'elle est diagonalisable. On commence par calculer le polynôme caractéristique de C. Après calculs, on trouve qu'il est égal à

$$\chi_C(X)=(X-1)(X+1)^2.$$

C admet donc deux valeurs propres, 1 et -1. On recherche les espaces propres associés. Pour la valeur propre 1, on trouve que $E_1=\mathbb{R}f_1$ avec $f_1=(1,1,1)$. Pour la valeur propre -1, on trouve que $E_{-1}=\mathbb{R}f_2\oplus\mathbb{R}f_3$ avec $f_2=(-1,1,0)$ et $f_3=(1,0,1)$. La matrice C est donc diagonalisable, de spectre 1 et -1. Son polynôme minimal est donc $(X-1)(X+1)$. On aurait pu aussi dire que son polynôme minimal divise le polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)^2$ tout en ayant les mêmes racines. Cela ne peut être que $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. Il était alors facile de vérifier que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur pour C. Pour D, le polynôme caractéristique de D est

$$\chi_D(X)=(X+1)^3.$$

La seule valeur propre de D est donc -1. Comme D n'est pas égale à $-I_3$, D n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Un calcul rapide montre que $(D+I_3)^2=0$, et donc le polynôme minimal de D est $(X+1)^2$.

Exercice 6.

Les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\ \text{et}\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Correction.

On vérifie facilement que A et B ont le même polynôme caractéristique $(1-x)(2-x)^2$. Cherchons les sous-espaces propres associés à la valeur propre 2. Pour la matrice A, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & -3z \\ z & = & z \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 pour A est donc la droite vectorielle engendrée par $(2, -3, 1)$. En particulier, A n'est pas diagonalisable. Pour B maintenant, on a

$$BX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & -y \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan engendré par les deux vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, -1)$. En particulier, la dimension de ce sous-espace propre est égale à la multiplicité de 2 comme racine du polynôme caractéristique. Maintenant, ceci entraîne que A et B ne sont pas semblables. Si c'était le cas, alors la relation être semblable étant transitive, A serait semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 7.

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, démontrer que A est diagonalisable.
3. Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs propres elles-mêmes ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Correction.

1. On commence par remarquer que $J^2 = J$ puis, en faisant le produit par blocs :

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & J \end{array}\right) \text{ et } A^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right) = A.$$

2. On remarque que $A^3 = A$. Posons $P(X) = X^3 - X$. Alors P est un polynôme annulateur pour A. De plus, P se factorise en $P(X) = X(X-1)(X+1)$: il est donc scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable.
3. Les valeurs propres de A sont contenues dans les racines du polynôme caractéristique. Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi 0, 1 et -1. De plus, on vérifie facilement que A est de rang 2 (par exemple, parce que les deux premières et les deux dernières colonnes sont identiques). Ainsi, $\dim(\ker(A)) = 4 - 2 = 2$. Cherchons la dimension du sous-espace

propre associé à 1. Posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Alors on vérifie facilement que

$$Au = u \iff x = y = z = t.$$

Ainsi, $E(1)$ est de dimension 1, une base de $E(1)$ étant donnée par $((1,1,1,1))$. De même, on a

$$Au = -u \iff x = y = -z = -t,$$

ce qui prouve que $E(-1)$ est de dimension 1, une base de $E(-1)$ étant donnée par $(1,1,-1,-1)$.

4. Puisque A est diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre (en tant que racine du polynôme caractéristique) et la dimension du sous-espace vectoriel associé coïncident. On a donc $C_A(X) = X^2(X-1)(X+1)$.

Exercice 8.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U.

Correction.

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé, à racines simples $(-1$ et $3)$, et donc U est diagonalisable. On peut même aller un cran plus loin et affirmer que $X^2 - 2X - 3$ est le polynôme minimal de U, puisqu'aucun polynôme de degré un n'est polynôme annulateur de U qui n'est pas multiple de I_4. Ainsi, les valeurs propres de U sont -1 et 3.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On commence par résoudre $UX = -X$:

$$\begin{aligned} UX = -X \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t &=& -x \\ x+z+t &=& -y \\ x+y+t &=& -z \\ x+y+z &=& -t \end{array} \right. \\ &\iff x+y+z+t = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -y-z-t \\ y &=& y \\ z &=& z \\ t &=& t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, -1 est une valeur propre de multiplicité 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $UX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1,1,1,1)$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 3. Il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Exercice 9.

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On note $\mathcal{C}_f$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.
3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Correction.

1. D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

2. Soit $g \in \mathcal{C}_f$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et g_i la restriction de g à $E_{\lambda_i}(f)$. Alors g est uniquement déterminé par les g_i. De plus, g_i peut être n'importe quel endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$. Autrement dit, l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_f & \to & \prod_{i=1}^p \mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \\ g & \mapsto & (g_1, \dots, g_p) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espace vectoriel. L'espace $\prod_{i=1}^p \mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$ ayant pour dimension $\sum_{i=1}^p \mathrm{mult}(\lambda_i)^2$, il en est de même de $\mathcal{C}_f$.
3. D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est de dimension n. La famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ étant clairement une famille d'éléments de $\mathcal{C}_f$, il suffit de prouver que c'est une famille libre. Ceci peut se démontrer avec un argument de polynôme minimal. En effet, si $\lambda_0 Id + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$, alors le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ annule f. Il est divisé par le polynôme minimal de f. Ce polynôme minimal est de degré n, car les valeurs propres de f sont toutes distinctes. Donc $P = 0$ et la famille est bien libre.

Exercice 10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Correction.

On va raisonner par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Admettons que le résultat soit vrai au rang $n-1$ et prouvons-le au rang n. Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors on sait que (attention, ce n'est pas trivial !) f est une homothétie, $f = \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$. Dans ce cas, λ doit être nul et la propriété est évidente ! Sinon, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre. Complétons alors la famille en $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de f a la forme suivante :
$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & A' \end{array}\right)$$
où A' est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Par hypothèse de récurrence, $A' = QB'Q^{-1}$ où B' a la forme voulue. Posons
$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$
qui est inversible. De plus on a
$$PBP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & B' \end{array}\right).$$
Autrement dit A est semblable à B qui est elle-même semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. A est semblable à cette dernière matrice et le résultat est prouvé au rang n.

Exercice 11.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Démontrer le résultat si A ou B est inversible.
2. Dans le cas général, on considère les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Correction.

1. Si par exemple A est inversible, AB et BA sont semblables. En effet, on peut écrire

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

2. Il est clair que

$$PN = MP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   De plus, P est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, donc P est inversible. Il vient que M et N sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Mais le calcul de χ_M fait intervenir le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs. On peut calculer ce déterminant par blocs et on trouve que

$$\chi_M(X) = X^n \chi_{BA}(X).$$

   De même, on a aussi

$$\chi_N(X) = X^n \chi_{AB}(X).$$

   Puisque $\chi_M = \chi_N$, on en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 12.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On va utiliser plusieurs méthodes. Pour A, on remarque que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. Son polynôme minimal ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X-1$ car si A serait égale à I_2 donc son polynôme minimal est $(X-1)^2$. Pour B, on remarque que $B^2 = 3B$ et donc $B^2 - 3B = 0$. Comme B n'est pas un multiple de l'identité, on en déduit que son polynôme minimal est $X^2 - 3X$. Pour C, nous allons utiliser le fait qu'elle est diagonalisable. On commence par calculer le polynôme caractéristique de C. Après calculs, on trouve qu'il est égal à

$$\chi_C(X) = (X-1)(X+1)^2.$$

C admet donc deux valeurs propres, 1 et -1. On recherche les espaces propres associés. Pour la valeur propre 1, on trouve que $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = (1,1,1)$. Pour la valeur propre -1, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = (-1,1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$. La matrice C est donc diagonalisable, de spectre 1 et -1. Son polynôme minimal est donc $(X-1)(X+1)$. On aurait pu aussi dire que son polynôme minimal divise le polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)^2$ tout en ayant les mêmes racines. Cela ne peut être que $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. Il était alors facile de vérifier que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur pour C. Pour D, le polynôme caractéristique de D est

$$\chi_D(X) = (X+1)^3.$$

La seule valeur propre de D est donc -1. Comme D n'est pas égale à $-I_3$, D n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Un calcul rapide montre que $(D+I_3)^2 = 0$, et donc le polynôme minimal de D est $(X+1)^2$.

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E et soit F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que

$$\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G).$$

Correction.

Posons $P = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $P(u)(y) = 0$ car $\pi_F | P$ et pour tout $z \in G$, on $P(u)(z) = 0$ car $\pi_G | P$. Puisque tout élément de $x \in E$ s'écrit $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on a $P(u)(x) = 0$, et donc $\pi_u | P$. Réciproquement, on sait que $\pi_F | \pi_u$ et que $\pi_G | \pi_u$, et donc $P | \pi_u$. En conclusion, on a bien $P = \pi_u$ (les deux polynômes sont unitaires).

Exercice 14.

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est X^2+1 ?

Correction.

Supposons d'abord qu'il existe une telle matrice. Alors puisque X^2+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$, A n'admet pas de valeurs propres réelles. Ceci n'est possible que si n est pair, sinon le polynôme caractéristique est de degré impair et s'annule. Réciproquement, supposons que $n = 2p$ est pair. La clé est le cas $n = 2$. Dans ce cas, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient (dans ce cas, on a également $\chi_B(X) = X^2+1$). Plus généralement, pour $n = 2p$ pair quelconque, on considère la matrice diagonale par blocs comprenant sur la diagonale p blocs de

B.

Exercice 15.

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère
$$\begin{array}{rcl} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array}$$
Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Correction.

1. On va procéder par récurrence sur k. La propriété est vraie si $k = 0$ ou si $k = 1$. Soit un entier $k \geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A. On trouve
$$A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1}.$$
De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB - BA = A$. Il vient :
$$ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}.$$
Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k + 1$.
2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.
3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k.
4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2, ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k \neq 0$, k est une valeur propre de ϕ_B. Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k \neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k = 0$.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. On suppose que f est diagonalisable. Démontrer que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. Réciproquement, on suppose que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, et on note $u \in E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$.
   (a) Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.

Correction.

1. On sait, puisque le rang de f est 1, et donc que la dimension de son noyau est $n-1$, que 0 est valeur propre de f d'ordre $n-1$. Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres pour f et donc il existe $x \in E$ vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Mais si $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, alors $f \circ f(x) = \lambda^2 x$ avec $\lambda^2 \neq 0$, et donc $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On a $f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Si λ était égal à 0, alors, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lambda_x u$ pour un certain $\lambda_x \in \mathbb{R}$, on aurait $f \circ f(x) = 0$, et donc $f \circ f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\lambda \neq 0$.
   (b) Notons $\lambda \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension au moins égale à 1. De plus, 0 est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension égale à $n-1$. La somme des dimensions des espaces propres étant supérieure ou égale à n (et donc en réalité égale à n), f est diagonalisable.

Exercice 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A. Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Si on regarde bien la matrice à laquelle A doit être semblable, on remarque que les $n-r$ premiers vecteurs doivent être dans $\ker f$, que les r premiers doivent être dans $\mathrm{Im}(f)$, et les r derniers sont définis en fonction des r premiers. On n'a donc pas trop le choix ! La condition $A^2 = 0$ entraîne que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\ker(f)$. Soit enfin, pour $i = 1, \dots, r$, e_{n-r+i} un vecteur tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$ (un tel vecteur existe car e_i est dans $\mathrm{Im}(f)$). Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, si

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

on applique f et on trouve

$$\lambda_{n-r+1} e_1 + \dots + \lambda_n e_r = 0.$$

La famille $(e_1, \dots, e_r)$ étant une base de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $\lambda_{n-r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. On obtient alors

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$$

ce qui implique à son tour que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\ker(f)$. Maintenant, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui prouve bien que A est semblable à cette dernière matrice.

Exercice 18.

Soit $n \geq 2$ et A la matrice définie par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \dots, n-1$, les autres coefficients étant tous nuls.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$?

Correction.

A ne peut pas être diagonalisable. Sa seule valeur propre est 0, et si A était diagonalisable, alors ce serait la matrice nulle. Remarquons ensuite en calculant les puissances successives de A que $A^n = 0$ alors que $A^{n-1} \neq 0$. S'il existait $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$, alors on aurait $B^{2n} = A^n = 0$. B serait donc nilpotente. Mais son indice de nilpotence doit être inférieur ou égal à n, et on aurait $B^n = 0$. Mais $B^{2n-2} = A^{n-1} \neq 0$, et $2n - 2 \geq n$, ce qui est absurde. A n'admet pas de racine carrée.

Exercice 19.

Soit $n \geq 1$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, V le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$, et T_0 le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

1. Quelle est la dimension de T_0 ?
2. Démontrer que $V \subset T_0$.
3. Pour $j \in \{2, \dots, n\}$, on note $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$. Calculer F_j^2. En déduire que $G_j \in V$.
4. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'éléments de V constituée par les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$ et par les matrices G_k, $k = 2, \dots, n$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
5. En déduire que $V = T_0$.

Correction.

1. T_0 est le noyau de la forme linéaire Tr. Ainsi, $\dim(T_0) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$.
2. V étant engendré par les matrices nilpotentes, et T_0 étant un espace vectoriel, il suffit de démontrer que $\mathcal{N} \subset T_0$. Mais, si A est une matrice nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur la diagonale sont nuls. Comme la trace est un invariant de similitude, on a bien $Tr(A) = 0$.
3. C'est une question un peu calculatoire. En développant le carré (attention, les produits ne sont pas commutatifs !) et en utilisant que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$ et $E_{i,l}$ sinon, on trouve que $F_j^2 = 0$. Puisque $E_{1,j}^2 = 0$ et $E_{j,1}^2 = 0$, on trouve bien que G_j, somme de trois matrices nilpotentes, est un élément de V.
4. Supposons que
$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=2}^{n} \beta_k G_k = 0.$$
Alors, pour $k \geq 2$, le seul terme en position (k, k) vient de $\beta_k G_k$, et il vaut $-\beta_k$. On a donc $\beta_k = 0$ pour tout $k = 2, \dots, n$. On en déduit alors que les $\alpha_{i,j}$ sont nuls car la famille $(E_{i,j})$ est libre.
5. D'après la question précédente, on a $\dim(V) \geq (n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$. Puisque $V \subset T_0$ et que $\dim(V) \geq \dim(T_0)$, on a bien $V = T_0$.

Exercice 20.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Correction.

On commence par écrire que $A + N = A(I_n + A^{-1}N)$ et donc il suffit de prouver que $\det(I_n + A^{-1}N) = 1$. Pour cela, nous allons prouver que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente. En effet, puisque A et N commutent, donc que A^{-1} et N commutent, on a

$$(A^{-1}N)^p = A^{-p}N^p = 0$$

dès que $N^p = 0$. Ainsi, $A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (que des zéros sur la diagonale). On en déduit que $I_n + A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que

$$\det(I_n + A^{-1}N) = 1$$

ce qui implique le résultat voulu.

Exercice 21.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente. Prouver que si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Prouver que $A_1 \cdots A_n = 0$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que les matrices commutent ?

Correction.

1. Puisque $AB = BA$, on a toujours $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$. Si les rangs sont égaux, puisque $BA(\mathbb{R}^n) \subset B(\mathrm{Im}(A))$, B est injectif sur $\mathrm{Im}(A)$ (appliquer le théorème du rang à $B_{|\mathrm{Im}(A)}$). De plus, puisque $BA = AB$, on sait que $\mathrm{Im}(A)$ est stable par B. Autrement dit, B induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(A)$. C'est donc aussi le cas pour B^n. Mais $B^n = 0$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$. Ainsi, si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. On prouve par récurrence sur p dans $\{0, \dots, n-1\}$ que

   $$\mathrm{rg}(A_{n-p} \cdots A_n) \leq n - p - 1.$$

   C'est vrai pour $p = 0$ car $\mathrm{rg}(A_n) < n$. Si c'est vrai à l'ordre $p < n-1$, alors ou bien $A_{n-p} \cdots A_n = 0$ et donc $A_{n-p-1} \cdots A_n = 0$ de rang 0, qui est bien inférieur ou égal à $n - p - 2$. Ou bien $A_{n-p} \cdots A_n \neq 0$, et d'après la question précédente :

   $$\mathrm{rg}(A_{n-p-1}A_{n-p} \cdots A_n) \leq \mathrm{rg}(A_{n-p} \cdots A_n) - 1 \leq n - p - 2.$$

   La propriété est donc vraie pour $p = n-1$ et elle prouve bien que $A_1 \cdots A_n = 0$. On ne peut pas se passer de l'hypothèse de commutativité, comme le montre l'exemple des deux matrices suivantes :

   $$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Correction.

Un sens est facile. Si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et sa trace est nulle. Comme chaque A^p pour $p \geq 1$ est nilpotente, on a bien prouvé l'implication directe. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et que pourtant A n'est pas nilpotente. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes non-nulles de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. La trigonalisation de A montre que, pour tout $p \geq 1$, les valeurs propres de A^p sont $\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Écrivons le système obtenu en écrivant les conditions $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour $p = 1, \dots, m$. On obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m & = & 0 \\
\alpha_1\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^2 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_1\lambda_1^m + \cdots + \alpha_m\lambda_m^m & = & 0
\end{array}\right.$$

Puisque tous les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux, on obtient un système de Vandermonde inversible, et on en déduit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. C'est une contradiction avec le fait que A admette des valeurs propres non-nulles. Donc A n'admet que 0 pour valeur propre et est donc nilpotente (puisque semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte).