Corrigé de la feuille d'exercices n°14

1. Séries de matrices

Exercice 1.

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. On a $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2+e^4 & 0 & e^2-e^4 \\ 2(e^4-e^2) & e^4 & 2(e^4-e^2) \\ e^2-e^4 & 0 & e^2+e^4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $B = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\exp(B) = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{1+i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1-i} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e\cos(1) & e\sin(1) & -e\sin(1) \\ 0 & e & 0 \\ e\sin(1) & e(1-\cos(1)) & e\cos(1) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

3. On a les résultats suivants :
   - si $M = \operatorname{diag}(M_1, ..., M_k) \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale par blocs où $M_i \in M_{p_i}(\mathbb{K})$ avec $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$, alors :

$$\exp(M) = \operatorname{diag}(\exp(M_1), ..., \exp(M_k));$$

   - si M, N communtent, alors $\exp(MN) = \exp(M)\exp(N)$.

Ainsi, comme $C = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ est diagonale par blocs, on calcule l'exponentielle de chacun des blocs.

On a $\exp(3) = e^3$ et on remarque que : $C' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + E_{1,2}$ où $2I_2$ et $E_{1,2}$ commutent, donc $\exp(C') = \exp(2I_2)\exp(E_{1,2})$.
De plus, $E_{1,2}$ est nilpotente d'indice 2, donc, pour tout $n \geq 2$, $E_{1,2}^n = 0_2$ et ainsi :

$$\exp(E_{1,2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{1,2}^n}{n!} = I_2 + E_{1,2}$$

Par suite,

$$\exp(C') = \exp(2I_2)\exp(E_{1,2}) = e^2 I_2.(I_2 + E_{1,2}) = e^2(I_2 + E_{1,2})$$

Il en résulte que :

$$\exp(C) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(3) & 0 \\ \hline 0 & \exp(C') \end{array}\right) = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Démontrer que la série $\sum A^n$ converge, et donner la valeur de $\sum_{n\geq 0} A^n$.

Correction.

On va commencer par diagonaliser A. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}$ dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{3}$. De plus, la recherche des vecteurs propres donne $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a aussi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fixons maintenant $N \in \mathbb{N}$, et utilisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right)P^{-1}.$$

Maintenant,

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{3^n} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{N} D^n = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{1}{2^N}}{1-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\frac{(-1)^{N+1}}{3^{N+1}}}{1+\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la série $\sum_n D^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Par continuité du produit matriciel, la série $\sum_n A^n$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $\exp(tA)$.

Correction.

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(X) = (X-1)^3$.
2. Posons $N = A - I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N. En effet, on a
$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$
D'autre part, puisque $tA = tI_3 + tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a
$$\exp(tA) = \exp(tI_3)\exp(tN) = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$
On en déduit
$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Correction.

Notons C_A le polynôme caractéristique de A qui, rappelons-le, est annulateur pour A. Soit $k \geq 0$. Si on effectue la division euclidienne de X^k par $C_A(X)$, on obtient

$$X^k = C_A(X)Q_k(X) + R_k(X)$$

où $\deg(R_k) \leq n-1$. Évaluons cette égalité en A. On obtient

$$A^k = R_k(A).$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout $k \geq 0$, $A^k \in \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, A, \dots, A^{n-1})$. Notons F ce sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, on sait que, pour tout $n \geq 0$, la matrice S_n définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ est élément de F. Comme F est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (un sous-espace est toujours fermé en dimension finie) et que (S_n) converge vers $\exp(A)$, on en déduit que $\exp(A)$ est élément de F, donc est un polynôme en A (de degré inférieur ou égal à $n-1$).

Exercice 5.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Correction.

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= e^a\left(I_3+bB+\frac{b^2B^2}{2}\right)(I_3+cB^2)\\ &= e^a\left(I_3+bB+\left(\frac{b^2}{2}+c\right)B^2\right)\end{aligned}$$

soit

$$\exp(A)=\begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2}+c\right)e^a\\ 0 & e^a & be^a\\ 0 & 0 & e^a\end{pmatrix}.$$

2. Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Exercice 6.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x)=e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
2. $f_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Correction.

1. L'inégalité $|f_n(x)|\leq e^{-nx}$ prouve que f_n converge simplement vers la fonction nulle. Posons $g(x)=e^{-x}\sin(2x)$. On a $f_n(x)=g(nx)$, et donc la suite

$$\|f_n\|_\infty=\|g\|_\infty>0$$

vaut une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand $n\to+\infty$: la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, si $a>0$ et $x\geq a$, on a :

$$|f_n(x)|\leq e^{-na},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

2. Si $x\neq 0$, $(f_n(x))$ tend vers 0 (c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0,1[$), et si $x=0$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 1. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction f égale à 1 en 0 et égale à 0 partout ailleurs. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction limite ne l'est pas en 0. En revanche, la convergence est uniforme sur les intervalles du type $[a,+\infty[$ avec $a>0$, puisque pour tout $x\geq a$, on a

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^n}\leq\frac{1}{(1+a^2)^n}$$

et le dernier terme de cette inégalité (qui ne dépend plus de $x\in[a,+\infty[$), tend vers 0.

Exercice 7.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Correction.

Les fonctions f_n sont paires, on peut restreindre l'étude à $[0, +\infty[$. $f_n(0) = n$ et donc $(f_n(0))$ diverge. Pour $x > 0$, la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que $(ne^{-n^2x^2})$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur $[a, +\infty[$, les fonctions (f_n) sont positives et décroissantes. On a donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$$

et comme $(f_n(a))$ tend vers 0, il en est de même de $(\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0|)_n$. La convergence est donc uniforme sur $[a, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Correction.

Prenons $x \in [0, 1]$. Puisque f_n est décroissante,

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

Il vient

$$\|f_n\|_\infty \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|).$$

Le terme de droite tend vers 0, et donc (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 9.

Étudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes sur les intervalles proposés :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \arctan(x + \dfrac{1}{n})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n \sin(x)$ sur $[0, 1]$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1-x)$ sur $[0,1]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } x \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. ⋆ CVS sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudions la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On a, par continuité de la fonction $f = \arctan$ sur $\mathbb{R}$:

   $$\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(x).$$

   Par suite, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ce, vers la fonction arctan.

   ⋆ CVU sur $\mathbb{R}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan(x)\right|.$$

   Comme arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

   $$\left|\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan(x)\right| \leq 1.\left(\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right) = \frac{1}{n}.$$

   D'où $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et :

   $$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : on aurait pu utiliser la formule d'addition de la fonction arctan (à redémontrer par le lecteur !) : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

   $$\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) & \text{si } ab < 1, \\ = \pm\frac{\pi}{2} & \text{si } ab = 1, \\ = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \pm \pi & \text{si } ab > 1. \end{cases}$$

   mais c'était tout de même moins évident !

2. $\star$ CVS sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudions la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
On a :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}\begin{cases} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 & \text{si } x = 0 \\ \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par suite, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et ce, vers la fonction nulle.

$\star$ CVU sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

On étudie la fonction $g_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et on a $g_n'(x) = n\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{n})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{1}{n}) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

Donc $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\|f_n - f\|_\infty \nrightarrow 0$.
Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Remarque : on aurait également pu remarquer que $(f_n - f)(x) = g(nx)$ avec $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ pour calculer sa norme infinie.

$\star$ Soit $a > 0$. CVU sur $[a, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

La même étude de fonction mais cette fois-ci sur $[a, +\infty[$ nous donne :

$$\|f_n - f\|_\infty = \begin{cases} g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} & \text{si } n < \frac{1}{a} \\ g_n(a) = \frac{na}{1+n^2a^2} & \text{si } n \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

donc, pour tout entier $n \geq \frac{1}{a}$, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{na}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où' $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1-x)$ sur $[0, 1]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } x \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Convergence simple des séries de fonctions

Exercice 10.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2 u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}$ tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.

Exercice 11.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. On va appliquer le critère des séries alternées. Il est clair que $|u_n(x)|$ tend vers 0, reste à voir que, pour $x \geq 0$, on a $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)|$[. Mais,

$$\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)},$$

et on conclut par croissance de la fonction logarithme.

Exercice 12.

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n.

Correction.

1. Pour $x \in]0,1[$, $u_n(x) > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \to x \in]0,1[.$$
Par le critère de d'Alembert, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. Si $x = 1$, alors $u_n(x) = 0$ et la convergence est triviale. De plus, on a clairement $S(1) = 0$. La convergence dans le cas $x = 0$ est elle aussi triviale.

Exercice 13.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \sim_{n \to +\infty} \frac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.

Exercice 14.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a
$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

Exercice 15.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x=0$, la série converge car $u_n(0)=0$. Pour $x>0$ fixé, on a
$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

Exercice 16.

Soit $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0)=0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=g(x)e^{-nx}$.

1.

Correction.

1. (a) Pour 0, $f_n(0)=0$ et la suite converge. Pour $x>0$, la suite $(g(x)e^{-nx})$ tend vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers 0.

Exercice 17.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a<b$ deux réels. Pour $x\in[a,b]$, on pose
$$f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a,b]$.

Correction.

1. On reconnait dans $f_n(x)$ une somme de Riemann pour f sur l'intervalle $[x,x+1]$, avec pas de $1/n$. Puisque f est continue, $(f_n(x))$ converge vers $\int_x^{x+1}f(t)dt$ pour tout $x\in[a,b]$ (et en fait, pour tout $x\in\mathbb{R}$).