Feuille d'exercices n°15

1. Convergence uniforme/normale des séries de fonctions

Exercice 1.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3.

Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1 - x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0, 1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 4.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

2. Étude d'une fonctions définies par une limite/somme de suite/série de fonctions

a. Exercices basiques

Exercice 8.

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 9.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
4. Quel est le sens de variation de S ?
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in -]t_0, t_0[\setminus\{0\}$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
6. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de S.

Exercice 10.

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que
$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$
3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 11.

Soit $C, a > 0$ et $\phi : [-a, a]$ une fonction continue vérifiant $|\phi(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in [-a, a]$. On souhaite étudier les fonctions $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante (notée $\mathcal{P}$) : f est continue, $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in [-a, a],\ f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est normalement convergente sur $[-a, a]$. On note h la somme de cette série.
2. Montrer que h vérifie $\mathcal{P}$.
3. Montrer que h est la seule fonction vérifiant $\mathcal{P}$.
4. On suppose de plus que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$. Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

b. Exercices d'entraînement

Exercice 12.

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S'.

Exercice 13.

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Exercice 14.

On considère la fonction $\mu(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.
   (a) Démontrer que, pour tout $x>0$, on a
   $$-1+2\mu(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right).$$
   (b) En déduire que pour tout $x>0$, on a
   $$0\leq -1+2\mu(x)\leq 1-\frac{1}{2^x}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 15.

Pour $x\geq 0$ et $n\geq 1$, on pose $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0,M]$ pour tout $M>0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit $n\geq 1$ et $x_0\geq n\geq 1$. Montrer que $f(x_0)\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
5. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Exercice 16.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $u_n(x)=\frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1}u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Exercice 17.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$
   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0,\delta[$,
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$
   (c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 18.

Sur $I =]-1,+\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 19.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\, t^n \,\sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) En déduire que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}.$$
   (c) Montrer que $f(t) = \arctan \dfrac{t\,\sin t}{1 - t\,\cos t}$ pour $t \in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k \,\sin k\,t$.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   (b) Montrer en écrivant $t^k \,\sin(k\,t) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \,\sin k\,t}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   (d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \,\sin n}{n}$.

Exercice 20.

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout k, $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.