Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 1.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Correction.

1. Il suffit de remplacer t par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$. On a donc
$$\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}.$$
La série converge si $|2x^2| < 1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Il suffit de factoriser par a au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$
Pour $|x/a| < 1 \iff |x| < |a|$, on obtient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$
Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.
3. On factorise par a :
$$\ln(x+a) = \ln\big(a(1+x/a)\big) = \ln(a) + \ln(1+x/a).$$
Pour $|x/a| < 1$, soit $|x| < a$, on en déduit
$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n a^n}.$$
Le rayon de convergence de la série entière obtenue est a.

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

La série converge pour $|x| < 1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n \geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour $|x| > 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I =]-1/2, 1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1$)

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc

$$(4 + x^2)^{-3/2} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction $u \mapsto (1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$\forall u \in]-1, 1[,\ (1+u)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n} u^n.$$

Il en résulte que pour tout x tel que $\frac{x^2}{4} \in]-1, 1[$, on a

$$\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence $]-2, 2[$.

Exercice 2.

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Correction.

Notons f la fonction considérée. On pourrait écrire $f(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus astucieux et beaucoup plus simple si on pense à écrire (attention aux exposants !)

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$, il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Exercice 3.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Correction.

On décompose f en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x = 1/2$, on trouve $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b = 1$. Pour trouver a, on peut procéder par identification et on obtient $a = 1$. On développe en série entière chaque terme :

— Pour $x \neq 2$,

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x/2}.$$

Donc, pour $|x|/2 < 1$, on a

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

— Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

— Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

Exercice 4.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\alpha \arcsin t) \\ f'(t) &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t) \\ f''(t) &= \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t). \end{aligned}$$

On combine d'abord f et f'' pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin t)$ puis on ajoute les termes en f' nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin t)$. Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$. La fonction $t \mapsto (1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y$ est donc somme

de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\big((n+1)(n+2)a_{n+2}+(-n(n-1)-n+\alpha^2)a_n\big)t^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=(n^2-\alpha^2)a_n.$$

Puisque $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=0$, on en déduit que $a_{2p+1}=0$ pour tout p et que

$$a_{2p}=\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right).$$

Réciproquement, la série entière

$$\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}$$

a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-t^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

$$f(x)=\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}.$$

Exercice 5.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On note $f_\alpha(x)=(1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et donner une équation différentielle du premier ordre vérifié par f_α sur $\mathcal{D}$.
2. On définit la famille de polynômes (L_k) par $L_0=1$ et $L_k(X)=X(X+1)\cdots(X+k-1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

3. En déduire que, pour tous réels α et β, on a

$$L_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que si α est un entier négatif ou nul, alors f_α est un polynôme et son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Sinon f_α est défini par $f_\alpha(x)=\exp(-\alpha\ln(1-x))$ qui est bien défini si $1-x>0$, donc si $x<1$. Dans ce cas, $\mathcal{D}=]-\infty,1[$. Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et, pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a
$$f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{1-x}\exp(-\alpha\ln(1-x))=\frac{\alpha}{1-x}f_\alpha(x).$$
Ainsi, f_α vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathcal{D}$:
$$(1-x)y'(x)-\alpha y(x)=0$$
(cette équation est également vérifiée en $x=1$ si $1\in\mathcal{D}$, c'est-à-dire si $-\alpha\in\mathbb{N}$).
2. Posons $I=]-1,1[$. L'équation différentielle précédente se réécrit, sur I,
$$y'(x)-\frac{\alpha}{1-x}y(x)=0.$$
D'après le théorème de Cauchy linéaire, elle admet une unique solution définie sur I vérifiant $y(0)=1$: la fonction f_α. Considérons ensuite la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n$. Alors, puisque
$$\frac{\frac{L_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}}{\frac{L_n(\alpha)}{n!}}=\frac{n+\alpha}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}1,$$
la règle de d'Alembert nous dit que cette série entière est de rayon de convergence 1. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $x\in I$,
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=L_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}\right)x^n.\end{aligned}$$
Or, $L_1(\alpha)=\alpha=\alpha L_0(\alpha)$ et
$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}&=\frac{L_{n+1}(\alpha)-nL_n(\alpha)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)-n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n-n)}{n!}\\&=\alpha L_n(\alpha).\end{aligned}$$
Ainsi, on a prouvé que, pour tout $x\in]-1,1[$,
$$(1-x)S'(x)=\alpha S(x).$$

Puisque $S(0) = L_0(\alpha) = 1$, l'unicité dans le théorème de Cauchy nous dit que $S = f_\alpha$ sur $]-1, 1[$, ce qui est le résultat demandé.

3. Rappelons l'énoncé du théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries entières : si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x_n$ sont deux séries entières, alors leur produit de Cauchy est la série entière $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$. De plus, si A et B ont pour rayon de convergence respectifs R_A et R_B, alors le rayon de convergence de C vérifie $R_C \geq \min(R_A, R_B)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \min(R_A, R_B)$, on a
$$C(x) = A(x)B(x).$$
Appliquons ce résultat avec $A(x) = f_\alpha(x)$ et $B(x) = f_\beta(x)$, dont la série produit est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{k!(n-k)!}\right) x^n.$$
Tenant compte du fait que $f_\alpha \cdot f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ et que
$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\frac{1}{n!},$$
on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{n!}\right) x^n.$$
Par unicité du développement en série entière, on obtient finalement que pour tout $n \geq 0$,
$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Exercice 6.

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!.$$
Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Correction.

Prenons $x \in [-a, a]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}\|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \leq C|xA|^{n+1}.$$
Soit $r = \min(a, 1/A)$. Alors si $|x| < r$, on a $|xA| < 1$ et donc $|xA|^{n+1} \to 0$. On en déduit que la série de Taylor de f converge vers f sur l'intervalle $]-r, r[$, et donc f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 7.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
2. $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
3. $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

Correction.

1. Pour $x \neq 0$, on a, d'après le développement en série entière de sin,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$
Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 1. Ainsi, f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence $+\infty$. f est donc de classe C^∞.
2. Pour $x \geq 0$, on a
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Pour $x < 0$, on a :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Ainsi, g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$: elle est donc de classe C^∞.
3. Pour $x \neq 0$, on a
$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$
On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, en mettant en facteur le premier terme. On trouve
$$h(x) = \frac{x^2 \times \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$
Posant $u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$ et $v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, on voit que pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Or, u et v sont de classe C^∞ (ce sont des sommes de série entière), v ne s'annule pas en 0, et de plus $u(0)/v(0) = 0 = h(0)$. Ainsi, h définit bien une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas en 0.

Exercice 8.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de

l'intervalle de définition ?

2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R,R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Correction.

1. Posons $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)}\to|x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x|<1$ et divergente pour $|x|>1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x=1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1,1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1,1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1,1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x\in[-1,1]$, on a
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right|\leq\frac{1}{n(2n+1)}$$
et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1,1]$. Comme chaque fonction $x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1,1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x|<1$,
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\ln(1+x^2).$$
En effet, pour $x\in]-1,1[$, on a $0\leq x^2<1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1+u)$. Puisque $f(0)=0$, on en déduit $f(x)=\int_0^x\ln(1+t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x 1\times\ln(1+t^2)dt\\&=\left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x-\int_0^x\frac{2t^2}{1+t^2}dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\int_0^x\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\int_0^x\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\left[t-\arctan(t)\right]_0^x\\&=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x.\end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1,1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0,1]$ tout entier. On conclut que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Correction.

1. Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque
$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
on a aussi convergence en 1 et -1. L'intervalle de convergence est donc $[-1,1]$.
2. Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geq 2$, on a
$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.
3. f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a
$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x).$$
Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$
La constante C se calcule en remarquant que $f(0) = 0 = C$.
4. L'égalité précédente est, a priori, vraie sur $]-1,1[$, mais puisque f et $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ sont continues en 1, elle est aussi vraie en 1. On en déduit
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$

2. Exercices d'entraînement

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 10.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :
$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x). \end{aligned}$$
On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :
$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$
2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $t \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$
Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+2} = \frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$
De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.
3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Correction.

1. La fonction $x\mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u=-t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.
2. La fonction $x\mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.
3. Par dérivation d'un produit, on a
$$f'(x)=xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-x^2/2}dt+1=xf(x)+1.$$
f est donc solution de l'équation différentielle $y'=xy+1$. Écrivons ensuite $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n\geq 1$,
$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$
et $a_0=1$. On en déduit finalement que
$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$
Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant x^{2n+1} qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

Exercice 12.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha>0$ tel que $[-\alpha,\alpha]\subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$,
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du.$$

On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$.

2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Correction.

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. On sait que f^{n+1} est croissante sur I puisque $f^{(n+2)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $u \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$. Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.
3. Il s'agit de démontrer que $R_n(x)$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite $(R_n(\alpha))$ est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour $x = \alpha$, et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$. Et donc $(R_n(x))$ tend bien vers 0.

3. Exercices d'approfondissement

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 13.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$$
   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^{2k+1} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $t^{2k+1} e^{-t^2} = o(t^{-2})$. Ceci justifie la convergence de $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt$. De plus, en réalisant une intégration par parties (on intègre te^{-t^2} et on dérive t^{2k}), on a pour $k \geq 1$
$$I_k = \left[\frac{-1}{2} t^{2k+1} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{2k-1} e^{-t^2} dt = kI_{k-1}.$$
Comme de plus
$$I_0 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2},$$
on en déduit que $I_k = \frac{k!}{2}$.

2. (a) Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1},$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt.$$

On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}.$$

Or, posons $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \to 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_k u_k$ converge, il en est donc de même de la série $\sum_k \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt$. Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons $g(x,t) = e^{-t^2}\sin(tx)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. De plus, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\cos(tx)$$

ce qui implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leq te^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de x) est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(tx)dt.$$

Pour former une équation différentielle vérifiée par f, on va intégrer par parties, en intégrant te^{-t^2} et en dérivant $\cos(tx)$. Il vient

$$f'(x) = \left[\frac{-1}{2} e^{-t^2}\cos(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; d'après le théorème de Cauchy, f est la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0)=0$. Cherchons maintenant une solution $y(x)=\sum_{k\geq 1} a_k x^k$ de cette équation différentielle vérifiant $y(0)=0$. On a

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 1$$

soit

$$2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+2)a_{k+2}+a_k\right) x^{k+1} = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1=\frac{1}{2}$ puis que $a_{k+2}=\frac{-a_k}{k+2}$. Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

Exercice 14.

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Correction.

1. Posons $u_n(x)=e^{-n}e^{n^2ix}$. Alors u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\geq 0$, on a
$$u_n^{(k)}(x)=(in^2)^k e^{-n} e^{n^2 ix}.$$
Puisque $n^{2k}e^{-n}=O(n^{-2})$, il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$|u_n^{(k)}(x)|\leq Mn^{-2}.$$
La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées k-ièmes $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k\geq 0$. Ainsi, $f=\sum_n u_n$ est de classe C^∞.
2. D'après le calcul précédent, on a $|f^{(k)}(0)|=\sum_{n\geq 0} n^{2k}e^{-n}\geq k^{2k}e^{-k}$. Or, $k^k\geq k!$, et donc
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\geq \frac{k^k}{k!}k^k e^{-k}\geq k^k e^{-k}.$$
3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide I centré en 0 tel que, pour tout $x\in I$, f serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait
$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$
Mais pour $x\neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,
$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\geq k^k(x/e)^k\to+\infty$$

(on peut aussi vérifier la non-convergence par le critère de d'Alembert). Ainsi, f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 15.

Soit $f(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0\neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f=\sum_{n\geq 0}b_nz^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $n\geq 0$, on a
$$|b_n|\leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Correction.

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a
$$\left(\sum_{n\geq 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_nz^n\right)=\sum_{n\geq 0}c_nz^n=1$$
avec $c_n=\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$. La suite (b_n) vérifie donc la relation de récurrence
$$\begin{cases} b_0 &= \frac{1}{a_0}\\ b_n &= \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^n a_kb_{n-k}\end{cases}$$
2. Soit $R>0$ tel que $|a_n|\leq R^n$ pour $n\geq 1$, et on pose $C>0$ suffisamment grand pour que
$$\sum_{k\geq 1}\frac{R^k}{C^k}\leq |a_0|$$
On va prouver par récurrence sur n que $|b_n|\leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors
$$|b_n|\leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^n\frac{R^k}{C^k}\frac{C^n}{|a_0|}\leq \frac{C^n}{|a_0|}\times\frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{R^k}{C^k}\leq\frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. Soit $g(z)=\sum_{n\geq 0}b_nz^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de (b_n), on a $f(z)g(z)=1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g=1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

Exercice 16.

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Correction.

1. Puisque $\{1, 2, 3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
   - les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
   $$D_{3,0} = 2,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ ayant k point fixes, alors la famille $A_0, \ldots, A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   - $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   - ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z| < 1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x| < 1$. De plus, on a
   $$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{n!}.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{d_k}{k!}\times\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}D_{n,k}=1.$$

On obtient

$$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x)f(x)=\frac{1}{1-x}$, on tire

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n\text{ avec }c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient bien $d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

7. La probabilité recherchée est $p_n=d_n/n!=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1)=1/e$.

Exercice 17.

On rappelle qu'une involution de $\{1,\dots,n\}$ est une application $s:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ telle que $s\circ s(k)=k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$ et on convient que $I_0=1$.

1. Démontrer que, si $n\geq 1$, alors
$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge pour tout x dans $]-1,1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $S'(x)=(1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Correction.

1. Considérons s une involution de $\{1,\dots,n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $\{1,\dots,n\}$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $\{1,\dots,n\}$. Dans ce cas, $s(k)=n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que
$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}.$$
2. Une involution est nécessaire bijective. Donc $I_n\leq n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1.

3. On a
$$(1+x)S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}x^n + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_n - nI_{n-1}}{n!}x^n.$$
En utilisant le résultat de la première question, on obtient
$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n+1}}{n!}x^n = S'(x).$$
4. La résolution de l'équation différentielle donne
$$S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x e^{\frac{x^2}{2}}.$$
On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve
$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!} \text{ et } I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$