Feuille d'exercices n°18

1. Exercices basiques

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
3. $A^{\perp} = \text{vect}(A)^{\perp}$;
4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), \ v = (1, 1, 1), \ w = (-1, -1, 0).$$

Exercice 4.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \text{vect}(1, x)$.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3,4,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N\rangle = \text{Tr}(M^T N).$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E;\ P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ à ce plan.

Exercice 12.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3, 4, 5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

b. Adjoint

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On rappelle que $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$.

1. On suppose que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\| = \rho(f)$.
2. On ne suppose plus que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\|^2 = \|f^* f\|$. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\rho(f^* f)}$.

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si (e_i) et (f_k) sont deux bases orthonormées de E, alors
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u^*(f_k)\|^2.$$
2. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$ est indépendant de la base orthonormée choisie.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Montrer que
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Exercice 16.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que f^* a la même propriété.
2. Montrer que $f - Id_E$ et $f^* - Id_E$ ont le même noyau.
3. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(f - Id_E)$.
4. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$.

2. Exercices d'entraînement

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 17.

On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

3. Exercices d'approfondissement

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 18.

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x, y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i, j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Démontrer le sens réciproque.

Exercice 19.

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$