Corrigé de la feuille d'exercices n°18

1. Exercices basiques

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction.

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$. Or,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y, et donc que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \iff \lambda(2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|) \geq 0.$$

Dressant le tableau de signes de ce produit, il ne peut être toujours positif que si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ est toujours nul, c'est-à-dire si $y = 0$, ou si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ ne s'annule qu'en 0, c'est-à-dire si $\langle x, y\rangle = 0$. Dans les deux cas, on trouve bien que x et y sont orthogonaux.

Exercice 2.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$;
4. $\mathrm{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Correction.

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.

2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résout de la même façon.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \mathrm{vect}(A)$, on a
$$\mathrm{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$
Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \mathrm{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments $a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n\rangle\\ &= \lambda_1\langle y, a_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle y, a_n\rangle\\ &= \lambda_1 0 + \dots + \lambda_n 0\\ &= 0,\end{aligned}$$
et donc $y \in \mathrm{vect}(A)^\perp$.
4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in A^{\perp\perp}$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.
5. Notons $B = \mathrm{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,
$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$
D'autre part,
$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$
Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux !

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :
$$u = (1, 0, 1),\ v = (1, 1, 1),\ w = (-1, -1, 0).$$

Correction.

Le premier vecteur est simplement $\frac{u}{\|u\|}$. Puisque $\|u\| = \sqrt{2}$, on a
$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Cherchons ensuite e_2' sous la forme $e_2' = v + \lambda e_1$ de sorte que $\langle e_2', e_1\rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\langle e_2', e_1\rangle &= \langle v, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} + \lambda \\
&= \sqrt{2} + \lambda.
\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\lambda = -\sqrt{2}$ ce qui donne

$$e_2' = (0,1,0).$$

Il est déjà normalisé et donc on pose $e_2 = (0,1,0)$. Cherchons ensuite e_3' sous la forme

$$e_3' = w + \lambda e_1 + \mu e_2$$

de sorte que $\langle e_3', e_1\rangle = 0$ et $\langle e_3', e_2\rangle = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\langle e_3', e_1\rangle &= \langle w, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda
\end{aligned}$$

d'où il vient $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\langle e_3', e_2\rangle &= \langle w, e_2\rangle + \mu\langle e_2, e_2\rangle \\
&= -1 + \mu
\end{aligned}$$

d'où $\mu = 1$. On en déduit que

$$e_3' = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

On normalise ce vecteur, et on trouve

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 4.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Correction.

On va orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1. Sa norme est $\sqrt{2}$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite
$$Q_1(X) = X + \lambda P$$
où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P\rangle = 0$. Mais,
$$\langle Q_1, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}dt + \lambda\langle P, P\rangle = \lambda.$$
On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux !), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en
$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$
On pose enfin
$$R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$$
de sorte que $\langle R_1, P\rangle = 0$ et $\langle R_1, Q\rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X, et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,
$$\langle R_1, P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$
On trouve $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc
$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$
Reste à normaliser ce vecteur en
$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$
Ainsi, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2-1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$
Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

Correction.

On commencer par rechercher une base de F. Pour cela on écrit que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in F &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t &=& 0\\ x+y+2z-t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+t &=& 0 & \\ 2z-2t &=& 0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x &=& -y & -t\\ y &=& y & \\ z &=& & t\\ t &=& & t\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $u_1=(-1,1,0,0)$ et $u_2=(-1,0,1,1)$, on trouve que (u_1,u_2) est une base de F. Notons ensuite $p_F(u)$ le projeté orthogonal de F sur u et donnons deux méthodes pour le calculer. Une première méthode consiste à écrire que $p_F(u)=au_1+bu_2=(-a-b,a,b,b)$ de sorte que $u-p_F(u)=(1+a+b,8-a,1-b,1-b)$. On sait que $u-p_F(u)\perp u_1$. Calculant le produit scalaire, on trouve

$$-1-a-b+8-a=0\iff 2a+b=7.$$

On sait aussi que $u-p_F(u)\perp u_2$ et toujours avec l'aide du produit scalaire :

$$-1-a-b+1-b+1-b=0\iff a+3b=1.$$

Ainsi, (a,b) est solution du système suivant, que l'on va résoudre :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} a+3b &=& 1\\ 2a+b &=& 7\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+3b &=& 1\\ -5b &=& 5\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 4\\ b &=& -1\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On trouve $p_F(u)=(-3,4,-1,-1)$. Deuxième méthode : on va orthonormaliser la base (u_1,u_2). Puisque $\|u_1\|=\sqrt{2}$, on pose

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0).$$

On cherche ensuite $u_2'=u_2+\alpha v_1$ de sorte que $\langle u_2',v_1\rangle=0$. Ceci donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\alpha=0\iff \alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

On obtient

$$u_2'=(-1,0,1,1)+\left(\frac12,-\frac12,0,0\right)=\left(-\frac12,-\frac12,1,1\right).$$

D'autre part,

$$\|u_2'\|^2=\frac14+\frac14+1+1=\frac{10}{4}$$

et donc on pose

$$v_2=\frac{u_2'}{\|u_2'\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-1,2,2).$$

On sait ensuite que $p_F(u)=\langle u,v_1\rangle v_1+\langle u,v_2\rangle v_2$. Or,

$$\langle u,v_1\rangle=\frac{7}{\sqrt{2}}\text{ et }\langle u,v_2\rangle=\frac{-5}{\sqrt{10}}$$

de sorte que

$$\langle u, v_1 \rangle v_1 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0 \right)$$

et

$$\langle u, v_2 \rangle v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1 \right).$$

Après un dernier petit calcul, on retrouve bien $p_F(u) = (-3, 4, -1, -1)$.

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \text{vect}(1, x)$.

Correction.

On va étudier deux façons de répondre à cet exercice. La première consiste à calculer une base orthonormée de F, et d'utiliser l'expression de la projection dans une base orthonormée. Posons $e_1 = 1$ et $e_2 = x$, qui est une base de $F = \text{vect}(1, x)$. On va orthonormaliser cette base en une base orthonormale (u_1, u_2). D'abord on a

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1.$$

Ensuite, on chercher $u_2' \in \text{vect}(u_1, e_2)$ tel que $u_2' \perp u_1$. Pour cela, on écrit $u_2' = e_1 + \lambda_1 u_1$. On a

$$\begin{aligned} u_2' \perp u_1 &\iff \langle u_2', u_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle e_1, u_1 \rangle + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \int_0^1 x dx + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \lambda_1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_2' = x - \frac{1}{2}$ est orthogonal à u_1 et $\text{vect}(u_1, u_2') = \text{vect}(e_1, e_2)$. On normalise ensuite u_2' :

$$\|u_2'\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{12}$$

et

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \sqrt{12} u_2' = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Il vient alors

$$p_F(x^2) = \langle x^2, u_2 \rangle u_2 + \langle x^2, u_1 \rangle u_1.$$

Or

$$\langle x^2, u_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x^3 - x^2) dx = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

et

$$\langle x^2, u_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

On obtient pour conclure
$$p_F(x^2)=\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{3}=x-\frac{1}{6}.$$
L'autre méthode consiste à écrire a priori que $p_F(x^2)=ax+b$ puis à déterminer a et b en écrivant que
$$\begin{aligned} x^2-p_F(x^2)\perp 1 &\iff \langle x^2-ax-b,1\rangle=0\\ &\iff \int_0^1 (x^2-ax-b)dx=0\\ &\iff \frac{1}{3}-\frac{a}{2}-b=0\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} x^2-p_F(x^2)\perp x &\iff \langle x^2-ax-b,x\rangle=0\\ &\iff \int_0^1 (x^3-ax^2-bx)dx=0\\ &\iff \frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}=0.\end{aligned}$$
On obtient un système que l'on résout facilement :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}-\frac{a}{2}-b&=&0\\ \frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a&=&1\\ b&=&-1/6.\end{array}\right.$$
On retrouve bien sûr le même projeté orthogonal $p_F(x^2)=x-\frac{1}{6}$.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3,4,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z=0$.

Correction.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est donnée par $v=(2,1,-1)$. Ainsi, par une formule du cours,
$$d(u,\mathcal{P})=\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|}=\frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 8.

Soit $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire
$$\langle M,N\rangle=\mathrm{Tr}(M^TN).$$
On pose $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Correction.

1. On remarque d'abord qu'une matrice M appartient à F si et seulement si elle s'écrit aI_2+bK avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Autrement dit, F est l'espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et K. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors M est élément de $F^\perp$ si et seulement si M est orthogonale à I_2 et à K. Maintenant,
$$\langle M, I_2\rangle = x+t \text{ et } \langle M, K\rangle = y-z.$$
Ainsi, M est élément de $F^\perp$ si et seulement si $t=-x$ et $z=y$. Autrement dit, on a prouvé que
$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$
Une base de $F^\perp$ est donnée par (A,B), avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On va orthonormaliser cette base pour obtenir une base orthonormale de $F^\perp$. On ne va pas avoir à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car A et B sont déjà orthogonales : $\langle A, B\rangle = 0$. De plus,
$$\|A\| = \|B\| = \sqrt{2}$$
comme le montre un rapide calcul. Si on pose
$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A \text{ et } B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}B,$$
alors (A_1, B_1) est une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Il suffit d'appliquer le résultat qui exprime le projeté dans une base orthonormale :
$$\begin{aligned} p_{F^\perp}(J) &= \langle J, A_1\rangle A_1 + \langle J, B_1\rangle B_1 \\ &= 0 + \frac{2}{\sqrt{2}}B_1 \\ &= B. \end{aligned}$$
3. On sait que
$$\mathrm{dist}(J,F) = \|J - p_F(J)\| = \|p_{F^\perp}(J)\| = \|B\| = \sqrt{2}.$$

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E;\ P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Correction.

1. Puisque H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3. Pour trouver une base de H, il suffit de trouver trois vecteurs indépendants. Posons par exemple $R_1(X) = X - 1$, $R_2(X) = X^2 - X$ et $R_3(X) = X^3 - X^2$. (R_1, R_2, R_3) est une famille de 3 éléments de H, qui est libre car les degrés respectifs des R_i sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan. Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connait l'équation d'un sous-espace vectoriel. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a donc
$$\begin{aligned} P \in H &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcrrr} a_0 & = & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & = & a_1 & & \\ a_2 & = & & a_2 & \\ a_3 & = & & & a_3. \end{array} \right. \end{aligned}$$
Cette méthode donne comme base $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$.
2. Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente. On a donc :
$$P_1 = R_1/\|R_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}}(X - 1).$$
Posons $P_2' = R_2 + \lambda P_1$, avec λ de sorte que $(P_2', P_1) = 0$, ce qui entraîne $\lambda = -(P_1, R_2)$. Après normalisation, on trouve
$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2).$$
On procède de même pour P_3, et on trouve
$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^3 - (X^2 + X + 1)/3\right).$$
3. On a
$$P_H(x) = \sum_{j=1}^{3}(X, P_j)P_j = \frac{-1}{4}\left(X^3 + X^2 - 3X + 1\right).$$
Il vient :
$$d^2(x, H) = \|x\|^2 - \|P_H(x)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Si on n'avait pas calculé une base orthonormale de H, on aurait pu remarquer que le polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ est normal à l'hyperplan H et donc que

$$d(X, H) = \frac{|\langle X, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Correction.

1. On commence par trouver une base de G. Mais on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -x_3. \end{cases}$$

On en déduit que $(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$ est une base de G. Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser. Si on pose $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$, alors (u_1, u_2) est une base orthonormale de G.

2. On va calculer $p_G(e_i)$ par la formule

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1\rangle u_1 + \langle e_i, u_2\rangle u_2.$$

On en déduit que la matrice de p_G dans la base canonique est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait que $d(x, G) = \|x - p_G(x)\|$. Écrivons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Alors

$$p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, -x_1 + x_2, x_3 - x_4, -x_3 + x_4)$$

et donc

$$x - p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 + x_4).$$

Il vient

$$d(x, G)^2 = \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2\right).$$

Exercice 11.

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-2&1\\-2&2&2\\1&2&5\end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1,1,1)$ à ce plan.

Correction.

On commence par remarquer que $A^2=A$. Ainsi, p est bien une projection. On va calculer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Il suffira ensuite de démontrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour pouvoir conclure. On remarque d'abord que $(x,y,z)\in\ker(p)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl}5x-2y+z&=&0\\-2x+2y+2z&=&0\\x+2y+5z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+2y+5z&=&0\\6y+12z&=&0\\-12y-24z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-z\\y&=&-2z\\z&=&z\end{array}\right.$$

Ainsi, $\ker(p)=\mathrm{vect}(u)$, où $u=(-1,-2,1)$. On en déduit (on sait déjà que p est une projection) que $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension 2. Puisque $p(e_1)$ et $p(e_2)$ sont indépendants, en posant $v=(5,-2,1)$ et $w=(-2,2,2)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{vect}(v,w)$. Pour démontrer que p est une projection orthogonale, il reste à prouver que $\ker(p)\perp\mathrm{Im}(p)$. Mais $u\perp v$ et $u\perp w$, donc on a bien $\mathrm{vect}(u)\perp\mathrm{vect}(v,w)$. Puisque u est un vecteur normal au plan $\mathrm{Im}(p)$, une équation de ce plan est

$$-x-2y+z=0.$$

Enfin, on calcule la distance de $(1,1,1)$ au plan $\mathrm{Im}(p)$ par la formule du cours :

$$d=\frac{|\langle u,(1,1,1)\rangle|}{\|u\|}=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 12.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3,4,5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

Correction.

Un vecteur normal du plan est $u=(2,1,-1)$. Un point du plan est $A=(0,0,2)$. On en déduit que la distance recherchée est

$$d=\frac{|\langle u,\overrightarrow{AM}\rangle|}{\|u\|}=\frac{\langle(2,1,-1),(3,4,3)\rangle}{\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}}.$$

b. Adjoint

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

Correction.

D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que

$$\ker(u) = \ker(u^* \circ u).$$

Déjà, il est clair que $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$. Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $u^*(u(x)) = 0$. En particulier, on a

$$\langle u^*(u(x)), x\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 = 0.$$

Ainsi, $x \in \ker u$ et on a bien l'égalité souhaitée.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On rappelle que $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$.

1. On suppose que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\| = \rho(f)$.
2. On ne suppose plus que f est autoadjoint. Montrer que $\|f\|^2 = \|f^*f\|$. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\rho(f^*f)}$.

Correction.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres pour f. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et donc
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i^2 \leq \rho(f)^2 \|x\|^2,$$
ce qui prouve que $\|f\| \leq \rho(f)$. D'autre part, il existe k tel que $\rho(f) = |\lambda_k|$. On a alors $\|f(e_k)\| = |\lambda_k| = \rho(f)$, et comme $\|e_k\| = 1$, on a $\rho(f) \leq \|f\|$.
2. Remarquons d'abord que f^*f est autoadjoint (car $(f^*f)^* = f^*f$). Ceci montre que $\rho(f^*f) = \|f^*f\|$. Il reste à prouver que $\|f\| = \|f^*f\|^{1/2}$. Mais, on a $\|f^*\| = \|f\|$, et
$$\|f^* \circ f\| \leq \|f^*\| \cdot \|f\| = \|f\|^2.$$
D'autre part, si $x \in E$,
$$\|f(x)\|^2 = (f^*(f(x)), x) \leq \|f^*(f(x))\| \cdot \|x\| \leq \|f^*f\| \cdot \|x\|^2,$$
ce qui prouve que $\|f\|^2 \leq \|f^*f\|$.

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si (e_i) et (f_k) sont deux bases orthonormées de E, alors
$$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2.$$
2. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2$ est indépendant de la base orthonormée choisie.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Montrer que
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

Correction.

1. On écrit
$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle u(e_i), f_k\rangle|^2,$$
de sorte que
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n |\langle u(e_i), f_k\rangle|^2\\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n |\langle e_i, u^*(f_k)\rangle|^2\\ &= \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2.\end{aligned}$$
2. Si (e_i) et (e_i') sont deux bases orthonormées, alors on aura toujours, (f_i) désignant une base orthonormée fixe
$$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u(e_i')\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2.$$
La quantité est donc indépendante de la base orthonormée choisie.
3. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Par un calcul direct, on a aussi
$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$$
de sorte que
$$\|u(e_1)\|^2 + \dots + \|u(e_n)\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2.$$
Mais, u est un endomorphisme autoadjoint, il est diagonalisable dans une base orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$ telle que $u(f_i) = \lambda_i f_i$. On a alors
$$\|u(f_1)\|^2 + \dots + \|u(f_n)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

D'après le résultat de la question précédente, ces deux quantités sont égales !

Exercice 16.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que f^* a la même propriété.
2. Montrer que $f - Id_E$ et $f^* - Id_E$ ont le même noyau.
3. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus^\perp \operatorname{Im}(f - Id_E)$.
4. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$.

Correction.

1. On a :
$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x), f^*(x)) = (f(f^*(x)), x) \leq \|f(f^*(x))\|\|x\| \leq \|f^*(x)\|\|x\|,$$
où on a utilisé successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la propriété vérifiée par f pour $y = f^*(x)$. En simplifiant par $\|f^*(x)\|$, on obtient le résultat demandé.
2. Prenons $x \in \ker(f - Id_E)$. On a :
$$\|f^*(x) - x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, f^*(x)).$$
Or, $(x, f^*(x)) = (f(x), x) = (x, x) = \|x\|^2$. On en déduit que :
$$\|f^*(x) - x\|^2 \leq \|f^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0.$$
Ainsi, $f^*(x) - x = 0$, et $x \in \ker(f^* - Id_E)$. On a donc prouvé que $\ker(f - Id_E) \subset \ker(f^* - Id_E)$. Puisque $(f^*)^* = f$, et que f^* vérifie la même propriété que f, on en déduit que l'inclusion inverse est aussi vérifiée.
3. Remarquons que $\ker(f - Id_E) = \ker(f^* - id_E^*) = (\operatorname{Im}(f - Id_E))^\perp$, ce qui prouve que les deux sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.
4. D'après la question précédente, $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(f - Id_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(f - Id_E)$. Pour x_1, on a $f(x_1) = x_1$, et par suite $f^k(x_1) = x_1$. On en déduit que $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_1) = x_1$. Pour x_2, x_2 s'écrit $x_2 = f(y) - y$. On a $f(x_2) = f^2(y) - f(y)$, et donc $x_2 + f(x_2) = f^2(y) - y$. Par récurrence, on prouve que $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = \frac{f^p(y) - y}{p}$. Mais $\|f^p(y)\| \leq \|y\|$, et donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = 0$. En conclusion, on en déduit que $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x) = x_1$, c'est-à-dire que cette limite est le projeté orthogonal de x sur $\ker(f - Id_E)$.

2. Exercices d'entraînement

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 17.

On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Correction.

Soit $g \in F^\perp$. Remarquons que la fonction h définie par $h(x) = xg(x)$ est dans F. On en déduit que $(g,h) = 0$, ce qui donne $\int_0^1 xg^2(x) = 0$. Or, la fonction $x \mapsto xg^2(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est qu'il s'agit de la fonction identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 0$. Maintenant, g est continue, et donc on obtient que g est identiquement nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$. D'autre part, si F admettait un supplémentaire orthogonal, on aurait $F \oplus F^\perp = E$. Ici, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal !

3. Exercices d'approfondissement

a. Espaces préhilbertiens

Exercice 18.

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x,y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Démontrer le sens réciproque.

Correction.

1. On va utiliser la formule de polarisation
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
Si on applique cette formule à $x = u + v$ et $y = u - v$, x et y sont orthogonaux et on trouve $\|u\| = \|v\|$.
2. Bien sûr, le sens réciproque est trivial puisqu'il suffit de choisir $x = y$. Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda x$. Alors, par la formule de polarisation

rappelée ci-dessus qu'on utilise deux fois :

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\lambda^2\|x+y\|^2 - \lambda^2\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{\lambda^2}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \lambda^2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

3. (a) C'est trivial d'après la question précédente.
   (b) On sait que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Soit $\lambda > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ. Soit $x \in E$ qui s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

La famille $(f(e_i))$ étant orthogonale, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \|f(e_i)\|^2\\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\\ &= \lambda^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

f est bien une similitude de rapport λ.

Exercice 19.

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Correction.

1. Puisque A est de rang p, l'application $X \mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Or, $\inf\{\|AX-B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ est la distance de B à $\mathrm{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0.
2. On a

$$\begin{aligned} AX_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z \in \mathrm{Im}(A),\ AX_0 - B \perp Z \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX_0 - B \perp AX \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T(AX_0 - B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X^T(A^TAX_0 - A^TB) = 0 \\ &\iff A^TAX_0 = A^TB. \end{aligned}$$

   X_0 est donc bien l'unique solution de $A^TAX = A^TB$.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2. La borne inférieure est donc atteinte en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de $A^TAX_0 = A^TB$.. Or

$$A^TAX_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A^TB = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que $x_0 = -1/2$ et $y_0 = 0$, et donc l'infimum recherché vaut $7/2$.