

Corrigé de la feuille d'exercices n°21

Partie A

Dénombrabilité et Familles sommables

1. Dénombrabilité

Exercice 1.

Soient deux ensembles E et F .

1. Soit A une partie de $E \cap F$. A est-elle une partie de E ? de F ? En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Soit B un ensemble qui est à la fois contenu dans E et aussi dans F . B est-il contenu dans $E \cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ est inclus dans $\mathcal{P}(E \cup F)$.
4. Donner un exemple simple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Correction.

1. Si A est une partie de $E \cap F$, alors $A \subset E \cap F$, donc on a à la fois $A \subset E$ et $A \subset F$. A est bien une partie de E et une partie de F . Autrement dit, on a prouvé que si $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(F)$. Ceci signifie que $\mathcal{P}(E \cap F) \subset \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Oui, si $B \subset E$ et $B \subset F$, alors $B \subset E \cap F$. Autrement dit, si $B \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, alors $B \subset E \cap F$. Ainsi, on a prouvé l'autre inclusion $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cap F)$. Finalement, on a $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$.
3. Prenons $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Alors, ou bien $A \in \mathcal{P}(E)$. Donc A est une partie de E , et en particulier une partie de $E \cup F$, donc $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$. Sinon, $A \in \mathcal{P}(F)$. Donc A est une partie de F , et en particulier une partie de $E \cup F$. Donc $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$. Dans tous les cas, $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$, et ceci prouve l'inclusion $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
4. L'idée est qu'une partie de $E \cup F$ n'est pas forcément une partie de E ou une partie de F . Prenons par exemple $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 4\}$. Alors $A = \{2, 3\}$ est une partie de $E \cup F$, mais n'est ni une partie de E , ni une partie de F . Dans ce cas, $\mathcal{P}(E \cup F)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Exercice 2.

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n; n \geq 0\}$;
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;

3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. l'ensemble des nombres premiers ;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Oui, car c'est une partie de $\mathbb{N}$ ou bien parce que l'application $n \mapsto 2^n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur cet ensemble.
2. Non, car $\mathbb{R}$ ne l'est pas et cet ensemble "contient" $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application $x \mapsto (0, x)$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
3. Oui, car l'application $\phi : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ est une surjection (et même une bijection car $\sqrt{2}$ est irrationnel) de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
4. Oui, car c'est une partie de $\mathbb{N}$;
5. Non, car il "contient" $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application $\phi : x \mapsto \phi_x$, où $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto xy$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}$.
2. Soit (u_n) une suite de $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément x_n dans $[0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}]$.
3. Pourquoi peut-on extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente vers $\ell \in [0, 1]$?
4. Démontrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Correction.

1. Par la formule de calcul des sommes géométriques, on trouve que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

2. La longueur de chaque intervalle $[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}]$ est $1/2^{k+1}$. La somme des longueurs de ces intervalles, pour k allant de 0 à n , est strictement inférieure à 1 d'après la question précédente. Ces intervalles ne peuvent pas donc recouvrir $[0, 1]$.
3. (x_n) est une suite bornée de $[0, 1]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente vers $\ell \in [0, 1]$.
4. Procédons par l'absurde, et supposons que $[0, 1]$ soit dénombrable. Alors, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $[0, 1] = \{u_n; n \geq 0\}$. On construit une suite (x_n) comme dans les questions précédentes, et on note ℓ la limite d'une suite extraite de (u_n) . Puisque $\ell \in [0, 1]$, il existe p tel que $\ell = u_p$. Mais pour tout $n \geq p$, on sait que $x_n \notin [\ell - \frac{1}{2^{p+2}}, \ell + \frac{1}{2^{p+2}}]$. Ceci contredit le fait qu'une suite extraite de (x_n) converge vers ℓ .

Exercice 4.

Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints. Démontrer que A est nécessairement au plus dénombrable.

Correction.

Pour chaque $a \in I_a$, $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel q_a qui est élément de I_a . De plus, les intervalles étant deux à deux disjoints, si $a \neq b$, alors $q_a \neq q_b$. On a donc construit une injection de A dans $\mathbb{Q}$, ce qui prouve que A est au plus dénombrable.

Exercice 5.

1. Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. On suppose que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est dénombrable et on note $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une bijection. En considérant $A = \{n \in \mathbb{N}; n \notin f(n)\}$, trouver une contradiction.

Correction.

1. On note A_p l'ensemble des parties de N avec au plus p éléments, avec $p \geq 1$. Alors l'application $\mathbb{N}^p \rightarrow A_p$, $(a_1, \dots, a_p) \mapsto \{a_1, \dots, a_p\}$ est surjective. Puisque $\mathbb{N}^p$ est dénombrable, chaque A_p est dénombrable (il est facile de voir que A_p n'est pas fini). Mais l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est la réunion dénombrable des A_p . Ainsi, cet ensemble est dénombrable.
2. Soit k tel que $f(k) = A$. Alors, si $k \in A$, $k \notin f(k) = A$ ce qui est une contradiction. Donc $k \notin A$. Mais alors, $k \in f(k) = A$, ce qui est tout autant une contradiction. Ainsi, une telle bijection ne peut pas exister et $\mathcal{P}(N)$ n'est pas dénombrable.

2. Familles sommables

Exercice 6.

Déterminer si la famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable où pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(1) a_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}}; \quad (2) a_{m,n} = \frac{1}{2^{m-n}}; \quad (3) a_{m,n} = \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}; \quad (4) a_{m,n} = \frac{1}{2^{mn}};$$

$$(5) a_{m,n} = \frac{1}{2^{\max(m,n)}}; \quad (6) a_{m,n} = \frac{1}{2^{\min(m,n)}};$$

Si c'est le cas, écrire la somme de la famille comme une somme de série (puis déterminer sa valeur si la série est connue!)

Correction.

On pose, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$V_m = \{(m, p) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \mathbb{N}\} \quad H_n = \{(p, n) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \mathbb{N}\} \quad \Delta_n = \{(p, n-p) \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

1. On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$.

- Somme sur chaque paquet. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(\frac{1}{2^{m+n}})_{m \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{m+n}}$ converge.
On note $a = \frac{1}{2^n}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \frac{1}{2^{m+n}} = \frac{a}{2^m}$ qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dans $] -1, 1[$) donc $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{m+n}}$ converge. Ainsi la famille $(\frac{1}{2^{m+n}})_{m \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$s_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n}} = a \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = a \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a = \frac{2}{2^n}.$$

- Somme des sommes sur les paquets. La famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum s_n$ converge. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{2}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dans $] -1, 1[$) donc $\sum s_n$ converge. Ainsi la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille $(\frac{1}{2^{m+n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = 4.$$

Remarque : comme $(\frac{1}{2^{m+n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille sommable, on a toujours d'après le théorème de sommation par paquet mais sur la partition $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$, la série $\sum_{k \geq 0} \sum_{(m,n) \in \Delta_k} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^k}$ converge et on a :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(m,n) \in \Delta_k} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m+n}} = 4.$$

2. — 1ère façon : en exhibant une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille $(\frac{1}{2^{n-n}})_{(n,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille $(\frac{1}{2^{m-n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

— 2ème façon : en utilisant le théorème de sommation par paquets sur la partition $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$.

- Somme sur chaque paquet. Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(\frac{1}{2^{m-n}})_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{m-n}}$ converge.

On note $a = \frac{1}{2^m} \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \frac{1}{2^{m-n}} = a 2^n$ qui est le terme général d'une série grossièrement divergente. Ainsi, la famille $(\frac{1}{2^{m-n}})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Par suite, d'après le théorème de sommation par paquets, la famille $(\frac{1}{2^{m-n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

3. On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$.

- Somme sur chaque paquet. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{m \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}$ converge.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} \leq \frac{1}{2^m}$ qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison dans $] -1, 1[$). Ainsi, par comparaison, $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}$ converge et donc la famille $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{m \in \mathbb{N}}$ est sommable. De plus, on a :

$$s_n = \sum_{(m,n) \in H_n} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{n+1})^{m+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

- Somme des sommes des paquets. La famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum s_n$ converge.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dans $] -1, 1[$) donc $\sum s_n$ converge. Ainsi la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

Remarque : voir exercice d'après !

4. On exhibe une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille $(\frac{1}{2^{0 \times n}})_{(0,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille $(\frac{1}{2^{mn}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

5. On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$.

- Somme sur chaque paquet. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{m \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{\max(m,n)}}$ converge.
Pour tout $m \geq n$, on a $0 \leq \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \frac{1}{2^m}$ qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dans $] -1, 1[$). Ainsi, par comparaison, $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{\max(m,n)}}$ converge et donc la famille $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{m \in \mathbb{N}}$ est sommable. De plus, on a :

$$s_n = \sum_{(m,n) \in H_n} \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n+2}{2^n}.$$

- Somme des sommes des paquets. La famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum s_n$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{n+2}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente (par exemple avec la règle de d'Alembert ou avec le critère de Riemann en multipliant par n^2) donc $\sum s_n$ converge. Ainsi la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n} = 6$$

Pour la dernière égalité, utiliser la remarque finale de la question 1 ou encore utiliser la somme de la série entière $\sum nx^n$.

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = 6.$$

6. On exhibe une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille $(\frac{1}{2^{\min(0,n)}})_{(0,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille $(\frac{1}{2^{\min(m,n)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

Exercice 7.

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Correction.

Écrivons que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}$. Démontrer la sommabilité de la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ revient à démontrer la sommabilité des deux familles $(q^n)_{n \geq 0}$ et $(q^n)_{n < 0}$. $\mathbb{Z}_-^*$ et $\mathbb{N}$ étant facilement mis en bijection avec $\mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que les deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ et $\sum_{n > 1} q^{|-n|}$ convergent absolument. C'est bien le cas puisqu'on a deux séries géométriques de raison dont le module est strictement inférieur à 1. Pour la somme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n \geq 0} q^n + \sum_{n \geq 1} q^n \\ &= 2 \sum_{n \geq 0} q^n - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q}. \end{aligned}$$

Exercice 8.

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Correction.

1. Il y a une infinité de termes dans $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$. En particulier, il y a une infinité de termes de la famille qui sont supérieurs à $1/4$. Ceci entraîne que la famille n'est pas sommable, ce qu'on retrouve en utilisant la définition. Si chaque somme finie de la série était majorée par M , il suffirait de prendre un ensemble fini F de $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$ contenant strictement plus de $4M$ éléments pour obtenir

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{x^2} > M,$$

ce qui est une contradiction.

2. Si la famille était sommable, toute sous-famille serait sommable. Prenons $I = \{(n, n+1); n \in \mathbb{N}\}$. La famille $(a_{n,m})_{(n,m) \in I} = (a_{n,n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ serait donc sommable. Ceci serait équivalent à la convergence de la série

$$\sum_n a_{n,n+1} = \sum_n \frac{1}{2n+1}.$$

Cette dernière série n'étant pas convergente, la famille n'est pas sommable.

Exercice 9.

On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.

Correction.

Notons $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $p \geq 2$, $I_p = \{(m, n) \in I; m+n = p\}$. Alors $(I_p)_{p \geq 2}$ est une partition de I . De plus, I_p a pour cardinal $p-1$ et on a donc

$$\sum_{i \in I_p} a_i = \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, la convergence de la série $\sum_i a_i$ est équivalent à la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{i \in I_p} a_i\right) = \sum_p \frac{p-1}{p^\alpha}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette dernière série converge si et seulement si $\alpha > 2$. La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 10.

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Correction.

On doit montrer la sommabilité de la famille et calculer sa somme. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, puis que la série $\sum_q \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. La somme de la famille sera alors égale la somme de cette dernière série. Mais, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^N \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et de plus

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 11.

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}} \right)_{n,p \geq 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\left(\frac{1}{np(n+p)} \right)_{n,p \geq 1}$
3. $\left(\frac{1}{a^p + b^q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}}$, $a, b > 0$.

Correction.

1. Remarquons d'abord que si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^{\alpha p}} \geq 1$, ce qui empêche la famille d'être sommable. Supposons donc $\alpha > 0$. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. On commence par remarquer que

$$\sum_{p \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{1 - \frac{1}{n^\alpha}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ et donc la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. Soit $n \geq 1$. Alors on a

$$\frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n} \right).$$

On a donc une série télescopique et

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

Il s'agit donc maintenant d'étudier la convergence de

$$\sum \frac{1}{n^2} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

En utilisant l'estimation bien connue

$$1 + \cdots + \frac{1}{n-1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$$

on obtient

$$\frac{1}{n^2} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$$

et puisque $\frac{1}{n^2 \ln(n)} = O(n^{-1.5})$, la série est convergente. Donc la famille est sommable.

3. On commence par remarquer que si $a \leq 1$, la famille n'est pas sommable. En effet, la sous-famille $(\frac{1}{a^p + b^q})_{(p,q) \in I}$ où $I = \{(p, 1) : p \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas sommable puisque la série

$$\sum \frac{1}{a^p + 1}$$

n'est pas convergente. De même, si $b \leq 1$, la famille n'est pas sommable. On peut donc supposer $a > 1$ et $b > 1$. Dans ce cas, puisque $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ pour tout $x, y \geq 0$ (développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$), on sait que

$$\frac{1}{a^p + b^q} \leq \frac{1}{2a^{p/2}b^{q/2}}.$$

Mais

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}b^{q/2}} = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}} \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{b^{q/2}} \right) < +\infty$$

puisque $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 1$. Finalement, on a prouvé que la famille est sommable.

Exercice 12.

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Correction.

1. C'est très classique, il suffit de comparer à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant cette inégalité pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, et en calculant les intégrales résultantes, on trouve

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et donc

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}.$$

2. Pour que la série à l'intérieur converge, il est nécessaire et suffisant que $\alpha > 1$. On a alors trouvé un équivalent de cette somme, et pour que la série à l'extérieur converge, il est alors nécessaire et suffisant que $\alpha > 2$. On peut donc donner un sens à cette expression si et seulement si $\alpha > 2$.
3. Comme les termes de la famille sont positifs, démontrer que cette expression a un sens revient à prouver que la famille est sommable, ou encore que l'on peut donner un sens à la double somme "permutée", c'est-à-dire à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n < k} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Mais la somme à l'intérieur vaut $\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ et on est ramené à l'étude de la série $\sum_k \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 2$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n < k} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Exercice 13.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n) = \#\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}$ le nombre de diviseurs positifs de n .

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{2^n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \frac{\pi^4}{36}$$

Exercice 14.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Correction.

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^n a^n = (n+1)a^n$. Si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat.

Exercice 15.

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Correction.

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n \geq 0$, w_n est positif et satisfait

$$w_n \leq 2^{-n} \exp(4).$$

Puisque la série de terme général $2^{-n} \exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n .

2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k \geq 0} a^k$, où a et b sont des réels. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

$$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{k \geq 0} a^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

où u_n est défini par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n \frac{(b/a)^k}{k!}.$$

Pour $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Ainsi, on a

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1-1/2} = 2 \exp(2).$$

Exercice 16.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$.

1. Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u \star v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis calculer $N(u \star v)$ en fonction de $N(u)$ et de $N(v)$.
3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
4. On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

Correction.

1. Puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, la famille (v_n) est majorée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que, pour tous les entiers k et n , $|u_k v_{n-k}| \leq M |u_k|$. Puisque $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable, il en est de même de $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$.
2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, de somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_k| \cdot |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$. La famille $(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|)_{k \in \mathbb{Z}}$ est elle-même sommable, de somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$. Ainsi, la famille $(u_k v_{n-k})_{(k,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable, de somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n$. On en déduit que la famille $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme. Finalement, en prenant partout des modules, on a bien

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|,$$

c'est-à-dire que $N(u \star v) = N(u) \times N(v)$.

3. On peut remarquer que $(u \star v)_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$. On en déduit immédiatement la commutativité. Pour l'associativité, il suffit d'écrire

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+l+m=n} u_k v_l w_m = (u \star (v \star w))_n.$$

L'élément neutre est donné par la suite δ vérifiant $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ sinon.

4. Imaginons que u soit inversible et notons v son inverse. Alors $(u \star v)_n = v_n - v_{n-1}$. Pour $n \geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$ et finalement $v_n = v_0$. Mais puisque (v_n) est sommable, ceci entraîne que $v_0 = 0$. Pour $n \leq 0$, on écrit encore que $v_{n-1} = v_n$, ce qui entraîne que $v_n = v_0 = 0$ pour tout $n < 0$. Ce n'est pas possible, car si v est identiquement nulle $u \star v$ l'est aussi et n'est pas égal à l'élément neutre δ .

Partie B

Probabilités discrètes

1. Exercices basiques

Exercice 17.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ où les ε_i sont des réels valant 0 ou 1.

On tire au hasard une matrice $M \in \mathcal{E}$ avec équiprobabilité. On considère les événements $A = "M$ est diagonale", $B = "M$ est triangulaire supérieure et non diagonale", $C = "M$ est triangulaire inférieure et non diagonale" et $D = "M$ n'est pas triangulaire".

- Déterminer la probabilité de chacun des événements précédents.
- Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

Correction.

- Remarquons que le cardinal de $\mathcal{E}$ est $2^4 = 16$. Puisqu'on tire les matrices de $\mathcal{E}$ de façon équiprobable, il suffit de dénombrer le nombre de matrices appartenant à A , etc... En réalité, pour chacun de ces 4 ensembles, les valeurs de ε_2 et ε_3 doivent être fixés, et les valeurs de ε_1 et ε_4 peuvent être quelconques :

- Pour A , on doit avoir $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ et les autres valeurs peuvent être quelconques ;
- Pour B , on doit avoir $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 0$;
- Pour C , on doit avoir $\varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 = 1$;
- Pour D , on doit avoir $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 1$.

Ainsi, la probabilité de chacun de ces événements sera $4/16 = 1/4$.

- Remarquons que A, B, C, D forme une partition de l'univers $\mathcal{E}$. On va dénombrer les matrices qui sont diagonalisables. C'est évidemment le cas des 4 éléments de A . Pour les éléments de B , ce sont uniquement les matrices ayant deux coefficients sur la diagonale différents (dans ce cas, 0 et 1 sont valeurs propres, dans le cas contraire, 0 ou 1 est valeur propre double, et M n'est pas diagonalisable car elle n'est pas égale à $0I_2$ ou I_2). Il y a deux tels éléments. On a la même conclusion pour les éléments de C . Quant aux éléments de D , ils sont tous diagonalisables. En effet, le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$

est $X^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)X - 1$ de discriminant $(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)^2 + 4 > 0$. M admet donc deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. En résumé, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable est $\frac{4+2+2+4}{16} = \frac{3}{4}$.

Exercice 18.

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \dots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

Correction.

L'énoncé nous dit que l'on cherche une probabilité P telle que $P(\{1, \dots, k\}) = \lambda k^2$. On a alors, pour $k = 1, \dots, n$,

$$P(\{k\}) = P(\{1, \dots, k\}) - P(\{1, \dots, k-1\}) = \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2 = 2\lambda k - \lambda.$$

On va déterminer λ en remarquant que

$$P(\{1, \dots, n\}) = 1$$

ce qui entraîne

$$\lambda n^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{n^2}.$$

La probabilité est donc définie par

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

On vérifie aisément que réciproquement, cette probabilité vérifie que $P(\{1, \dots, k\})$ est proportionnelle à k^2 .

Exercice 19.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Correction.

On considère A_n l'événement défini par "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n -ième lancer donne 6". L'événement étudié est $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Ces événements étant disjoints, on a $P(A) = \sum_{n \geq 1} P(A_n)$. Par indépendance des lancers, on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}.$$

On en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 20.

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $2/3$. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $1/2$. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

Correction.

Notons A_n l'événement : "Émile et Paulin ratent leurs $n - 1$ premiers tirs, Paulin rate son n -ième tir, et Émile réussit son n -ième tir". Alors les événements A_n sont disjoints et leur réunion est l'événement "Émile gagne" que l'on note désormais A . On a donc

$$P(A) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

Mais on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}.$$

Il vient

$$P(A) = \sum_{n \geq 1} 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n = 2 \frac{1/6}{1 - 1/6} = \frac{2}{5},$$

où on a utilisé la somme d'une série géométrique.

Exercice 21.

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :

- A = "les deux enfants sont de sexes différents"
- B = "l'aîné est une fille"
- C = "le cadet est un garçon".

Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à $1/2$.

Correction.

Clairement, on a $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Les quatre possibilités pour les deux enfants, supposées équiprobables, sont (F,G) , (F,F) , (G,G) , (G,F) . On en déduit que $P(A) = \frac{1}{2}$. Ensuite $A \cap B$ correspond à (F,G) et donc $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$. On en déduit que A et B sont indépendants. On prouve de la même façon que A et C sont indépendants, et que B et C sont indépendants. Enfin, $A \cap B \cap C = B \cap C$ et donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$. Les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 22.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on considère $a \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$P(X_1 \geq a) > 0 \iff \forall n \geq 1, P(S_n \geq na) > 0.$$

Correction.

Le sens réciproque est trivial puisqu'il correspond uniquement au cas $n = 1$. Pour le sens direct, on remarque que

$$(S_n \geq na) \supset (X_1 \geq a) \cap (X_2 \geq a) \cap \dots \cap (X_n \geq a)$$

ce qui implique que

$$P(S_n \geq na) \geq P((X_1 \geq a) \cap (X_2 \geq a) \cap \dots \cap (X_n \geq a)).$$

Les variables aléatoires étant indépendantes, on en déduit que

$$P(S_n \geq na) \geq \prod_{j=1}^n P(X_j \geq a).$$

Enfin, puisque les X_i ont toutes la même loi que X_1 , on a

$$P(S_n \geq na) \geq (P(X_1 \geq a))^n.$$

Ainsi, si $P(X_1 \geq a) > 0$, on a bien $P(S_n \geq na) > 0$ pour tout entier $n \geq 1$, ce qui prouve le sens direct.

Exercice 23.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Correction.

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots\}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Exercice 24.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

Correction.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}.$$

La suite est décroissante si et seulement si ce rapport est toujours inférieur ou égal à 1. Il atteint sa valeur maximale pour $k = 0$, et donc la suite est décroissante si et seulement si $\lambda \leq 1$.

Exercice 25.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Correction.

On a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}$$

d'où

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} \geq 1 \iff k \leq \lambda - 1.$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $\lambda - 1 < 0$, c'est-à-dire $\lambda \in]0, 1[$, la suite $(P(X = k))$ est strictement décroissante, et donc son maximum est atteint en $P(X = 0)$.
2. si λ est un entier, la suite est strictement croissante jusque $\lambda - 1$, strictement décroissante à partir de λ et le maximum est atteint en deux points : $P(X = \lambda - 1)$ et $P(X = \lambda)$.
3. Si λ n'est pas un entier, la suite est strictement croissante jusque $\lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1$, puis strictement décroissante ensuite. La valeur maximale est donc $P(X = \lfloor \lambda \rfloor)$.

Exercice 26.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . Calculer $P(Y > X)$.

Correction.

L'événement $Y > X$ est la réunion des événements disjoints $X = k, Y > k$, pour k allant de 1 à $+\infty$. Par indépendance des variables aléatoires X et Y , on a $P(X = k, Y > k) = P(X = k) \times P(Y > k)$. De plus, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on sait que

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ et } P(Y > k) = (1 - q)^k.$$

On en déduit que

$$P(Y > X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - q)((1 - p)(1 - q))^{k-1} = \frac{p(1 - q)}{1 - (1 - p)(1 - q)} = \frac{p - pq}{p + q - pq}.$$

Exercice 27.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2 . On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z .

Correction.

1. Il s'agit simplement de calculer la somme d'une série géométrique : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} \\ &= p_1 \frac{q_1^n}{1 - q_1} \\ &= q_1^n \end{aligned}$$

où on a posé $q_1 = 1 - p_1$.

2. Remarquons que $Z > n$ si et seulement $X > n$ et $Y > n$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(Z > n) &= P(X > n) \times P(Y > n) \\ &= q_1^n q_2^n \end{aligned}$$

3. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $Z > n - 1$ est la réunion disjointe de $Z > n$ et $Z = n$. Ainsi,

$$P(Z > n - 1) = P(Z > n) + P(Z = n).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} - q_1^n q_2^n \\ &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} (1 - q_1 q_2) \end{aligned}$$

Si on pose $q = q_1 q_2$ et $p = 1 - q$, alors

$$q_1 q_2 - 1 = p$$

et $P(Z = n) = pq^{n-1}$. La variable aléatoire Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Exercice 28.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z .

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
 - (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
 - (b) En déduire la loi de Z .
2. Méthode 2.
 - (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
 - (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
 - (c) En déduire la loi de Z .

Correction.

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
 - (a) Remarquons qu'il est d'abord impossible que $T > Z$. Ainsi, si $n > m$, on a $P((Z = m) \cap (T = n)) = 0$. Ensuite, si $n = m$, alors on doit avoir $X = Y = m$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = P((X = m) \cap (Y = m)) = p^2 q^{2(m-1)}.$$

Enfin, si $n < m$, l'événement $(Z = m) \cap (T = n)$ est égal à la réunion des deux événements disjoints $(X = m) \cap (Y = n)$ et $(X = n) \cap (Y = m)$. La probabilité de chacun de ces événements étant $p^2 q^{m-1} q^{n-1}$, on a dans ce cas

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = 2p^2 q^{m-1} q^{n-1}.$$

- (b) On va utiliser la formule des probabilités totales. En effet, les événements $(Y = n)$, pour n parcourant $\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Z = m) \cap (T = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2 q^{m-1} q^{n-1} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2p^2 q^{m-1} \frac{1 - q^{m-1}}{1 - q} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2pq^{m-1} - 2pq^{2m-2} + p^2 q^{2m-1}. \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1 - q} = q^m.$$

- (b) Remarquons que l'on a $Z > m$ si et seulement si $X > m$ ou $Y > m$. Utilisant la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, on trouve

$$P(Z > m) = P(X > m) + P(Y > m) - P((X > m) \cap (Y > m)) = 2q^m - q^{2m}.$$

- (c) Remarquons que l'événement $(Z > m - 1)$ est réunion disjointe des événements $(Z > m)$ et $Z = m$. On en déduit

$$P(Z > m - 1) = P(Z > m) + P(Z = m)$$

soit encore

$$P(Z = m) = P(Z > m - 1) - P(Z > m) = 2q^{m-1} - q^{2m-2} - 2q^m + q^{2m}.$$

Utilisant $p = 1 - q$, on peut vérifier que les résultats des deux méthodes coïncident.

Exercice 29.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Correction.

Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont X_1 et X_2 . Si $X_1 \neq X_2$, alors la matrice est diagonalisable. Si au contraire $X_1 = X_2$, alors l'espace propre associé à l'unique valeur propre X_1 a pour équation $y = 0$: il est de dimension 1 et A n'est pas diagonalisable. A est donc diagonalisable si et seulement si $X_1 \neq X_2$. Or,

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$

car les variables aléatoires sont indépendantes. On a donc

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

La probabilité recherchée est donc

$$1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

Exercice 30.

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut p , avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note G_1 l'événement "le joueur 1 gagne" et G_2 l'événement "le joueur 2 gagne".

1. En utilisant le système complet d'événements $(A, \bar{A})$ où A est l'événement "le premier

lancer amène un 6", démontrer que $P(G_2) = (1 - p)P(G_1)$.

2. Démontrer que $P(G_1) + P(G_2) = 1$.
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.
4. Retrouver le résultat en introduisant les événements A_k ="le premier 6 apparaît au k -ème lancer".

Correction.

1. Notons A l'événement : "le premier lancer donne un 6". Alors on a

$$P(G_2) = P_A(G_2)P(A) + P_{\bar{A}}(G_2)P(\bar{A}).$$

Bien sûr, on a $P_A(G_2) = 0$: si le premier lancer amène un 6, le deuxième joueur a perdu. D'autre part, on a $P_{\bar{A}}(G_2) = P(G_1)$. En effet, si le premier lancer n'amène pas un six, alors tout se passe comme si on commençait une nouvelle partie mais avec le deuxième joueur qui tire en premier. On en déduit que

$$P(G_2) = P(G_1)P(\bar{A}) = (1 - p)P(G_1).$$

2. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier 6, $X = +\infty$ si on n'obtient jamais de 6. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p , et donc $P(X < +\infty) = 1$. Mais on a aussi $G_1 \cup G_2 = (X < +\infty)$. D'où le résultat.
3. Comme conséquence du résultat des deux questions précédentes, on trouve

$$(1 - p)P(G_1) + P(G_1) = 1 \implies P(G_1) = \frac{1}{2 - p}$$

d'où on déduit immédiatement que

$$P(G_2) = \frac{1 - p}{2 - p}.$$

4. Le joueur 1 gagne si le premier lancer qui amène un 6 possède un rang impair. On a donc

$$G_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1}.$$

Or, l'événement A_{2k+1} correspondant à $2k$ lancers donnant un nombre différent de 6, chacun avec une probabilité égale à q , et un dernier lancer donnant un 6 avec probabilité p . On a donc

$$P(A_{2k+1}) = pq^{2k}$$

et

$$P(G_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{2k} = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q} = \frac{1}{2 - p}.$$

Remarquons qu'avec les notations de la question 2, on a aussi $A_{2k+1} = "X = 2k + 1"$ ce qui permet de retrouver $P(A_{2k+1})$.

Exercice 31.

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pP(X \geq n)$. Déterminer la loi de X .

Correction.

Pour simplifier, notons $p_n = P(X = n)$. La formule avec $n = 1$ donne :

$$p_1 = p \sum_{k \geq 1} p_k = p.$$

Pour $n = 2$, on a

$$p_2 = p \sum_{k \geq 2} p_k = p \left(\sum_{k \geq 1} p_k - p_1 \right) = p(1 - p).$$

Montrons ensuite par récurrence sur k que $p_k = p(1 - p)^{k-1}$. Le résultat est vérifié si $k = 1, 2$, supposons le vérifié jusqu'au rang k et prouvons le au rang $k + 1$. D'après la contrainte imposée par l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p \sum_{j \geq k+1} p_j = p \left(1 - \sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1} \right) \\ &= p \left(1 - p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right) \\ &= p(1-p)^k. \end{aligned}$$

Le résultat est donc prouvé au rang $k + 1$ et par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout k . On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre p .

2. Exercices d'entraînement**Exercice 32.**

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Correction.

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r + 1, \dots\}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r - 1$ fois pile, parmi $k - 1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Exercice 33.

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2 , p_3 , p_4 .
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n .
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Correction.

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au k -ième lancer. L'événement $(X = 2)$ correspond à :

$$(X = 2) = P_1 P_2 \implies p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$(X = 3) = F_1 P_2 P_3 \implies p_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Pour $(X = 4)$, cela se corse un peu !

$$(X = 4) = F_1 F_2 P_3 P_4 \cup P_1 F_2 P_3 P_4 \implies p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X = n$, on peut :
 - ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer. Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X = 2$), donc avec une probabilité de $1/3$. Puis il reste $n - 2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n - 2$ -ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2} . On a donc

$$P(X = n | P_1) = \frac{1}{3} p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

- ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n - 1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n - 1$ -ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1} . On a donc

$$P(X = n | F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n \geq 2$, on a

$$p_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_2 et p_3). On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $n = 1$ puisqu'on a alors $p_1 = 0$.

4. Il est bien connu que pour tout $q \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit, après un peu de calculs :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}.$$

En moyenne, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, il faudra $15/4$ lancers (non entier !) pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs.

Exercice 34.

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n , on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y . Calculer l'espérance de Y .
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Correction.

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a fait $n+2$ tirages, n amenant face, et 2 amenant pile. Le $n+2$ -ième tirage était un pile, et il y a avait un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire correspondant a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :

$$P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$

2. Puisque $p \in]0, 1[$, on a $n(n+1)(1-p)^n = o(1/n^2)$ et la série définissant $E(X)$ est donc convergente. Pour calculer sa somme, il faut se souvenir des 3 formules suivantes, qui se

déduisent de la théorie des séries entières, valables pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

Écrivant $n(n+1) = n(n-1) + 2n$, on trouve

$$\begin{aligned}E(X) &= p^2 \sum_{n \geq 0} n(n-1)(1-p)^n + 2p^2 \sum_{n \geq 0} n(1-p)^n \\ &= p^2(1-p)^2 \frac{2}{p^3} + 2p^2(1-p) \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2(1-p)^2}{p} + 2(1-p) \\ &= \frac{2(1-p)}{p}.\end{aligned}$$

3. Si $n \geq 1$ est fixé, et $k \in \{0, \dots, n\}$, on a clairement :

$$P(Y = k | X = n) = \frac{1}{n+1}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)p^2(1-p)^n \frac{1}{n+1} = p(1-p)^k.\end{aligned}$$

On reconnaît que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p . On a donc :

$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$

Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.

4. On a :

$$(Z = h) = \bigcup_{j=0}^{\infty} [(Y = j) \cap (X = h+j)].$$

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}P(Z = h) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(Y = j | X = h+j) P(X = h+j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j} \\ &= p(1-p)^h.\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}P[(Z = h), (Y = j)] &= P(X = h + j, Y = j) = P(Y = j | X = h + j)P(X = h + j) \\&= p^2(1 - p)^{h+j}.\end{aligned}$$

Ceci est égal à $P(Z = h) \times P(Y = j)$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 35.

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_k ($2 \leq k \leq 4$) est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Écrire un algorithme simulant le fonctionnement de la variable aléatoire X . On supposera que l'on dispose d'une fonction $\text{ALEA}(a, b)$ qui simule une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{a, a + 1, \dots, b\}$.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n .
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de X .

Correction.

1. On va utiliser deux variables : instant qui désigne l'instant où l'on est, et k qui désigne le spot allumé à l'instant courant. Un algorithme possible est :

```

Variables :
    k, instant entiers
Initialisation :
    instant=0
    k=1
Traitement :
    Tant que (k<>2) faire
        instant=instant+1
        Si k=1 faire k=ALEA(1,4)
        sinon faire k=k-1
        Fin Si
    Fin Tant Que
Afficher instant

```

Exercice 36.

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i .

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1, 1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\sum_{n \geq r} n(n-1) \cdots (n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance?

Correction.

1. On rappelle que la série géométrique $S(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1. Sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$. Le résultat vient alors du calcul de la r -ième dérivée de cette série entière (rappelons que l'on peut dériver terme à terme une série entière dans son intervalle ouvert de convergence).
2. S_n représente le nombre de points perdus après n jours. Chaque X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, indépendante. De plus,

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

par indépendance des événements "dépasser la vitesse" et "être contrôlé". S_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{20}$. Par les formules du cours, on a

$$E(S_n) = \frac{n}{20}, \quad V(S_n) = \frac{1 \times 19}{20 \times 20} n = \frac{19}{400} n.$$

3. T prend, outre la valeur 0, des valeurs $n \geq 6$. On a $T = n$ si et seulement si $S_{n-1} = 5$ et $X_n = 1$. Par indépendance de ces événements, on a donc pour $n \geq 6$,

$$P(T = n) = P(S_{n-1} = 5)P(X_n = 1) = \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \left(\frac{19}{20}\right)^{n-6}.$$

Reste à calculer $P(T = 0)$. On a

$$P(T = 0) = 1 - \sum_{n \geq 6} P(T = n).$$

Mais, d'après le rappel effectué à la première question,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 6} P(T = n) &= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n \geq 6} (n-1) \cdots (n-5) \left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\ &= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n \geq 5} n \cdots (n-5+1) \left(\frac{19}{20}\right)^{n-5} \\ &= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{5!}{\left(1 - \frac{19}{20}\right)^6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(T = 0) = 0$, ce qui signifie que Rémi va perdre presque sûrement son permis. Le calcul de l'espérance suit la même méthode :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 6} n P(T = n) &= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n \geq 6} n(n-1) \cdots (n-5) \left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\ &= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{6!}{\left(1 - \frac{19}{20}\right)^7} \\ &= 120. \end{aligned}$$

En moyenne, Rémi va conserver son permis à peine 4 mois !

Exercice 37.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir pile est égale à p . On suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres. Soit $r \geq 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues avant le r -ième pile. Quelle est la loi de X ?

Correction.

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Alors si $X = k$, on a fait $r + k$ lancers : r amenant piles, et k amenant faces. Calculer $P(X = k)$ revient à calculer la probabilité que, dans la répétition de $r + k$ épreuves de Bernoulli avec probabilité p de succès, on ait obtenu r fois le succès (pile) et k fois l'échec (face). Fixons un tel événement élémentaire, c'est-à-dire une suite de $r + k$ lancers comprenant r piles, k faces, et se terminant par un pile. Par indépendance des lancers, la probabilité d'un tel événement élémentaire est $p^r(1 - p)^k$. Il reste donc à compter combien il y a de tels lancers. Puisque le dernier lancer est un pile, il suffit de compter le nombre de lancers amenant k faces parmi $r + k - 1$ lancers (ou, dans un arbre de Bernoulli à $r + k - 1$ épreuves, combien de chemins comportent exactement k échecs). Par définition des coefficients binomiaux, il y en a exactement $\binom{r+k-1}{k}$. On conclut que

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k.$$

Exercice 38.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On répète un certain nombre de fois le protocole suivant : on tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est noire, on la remet dans l'urne, et on ajoute une boule blanche. On note Y la variable aléatoire correspondant au rang du tirage d'une boule blanche. On convient que $Y = 0$ si les tirages n'amènent jamais une boule blanche.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que l'on réalise au plus trois tirages.
 - (a) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilités.
 - (b) Déterminer la loi de probabilité de Y .
2. On suppose désormais, et jusqu'à la fin de l'exercice, qu'on répète les tirages jusqu'à obtention d'une boule blanche. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Y .
4. On note A_k l'événement "la k -ième boule tirée est noire". Exprimer l'événement " $Y = k$ " en fonction des événements $A_1, \dots, A_k$.
5. Pour $j \geq 2$, calculer $P(A_j | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$ et $P(\overline{A_j} | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de $P(Y = k)$.
7. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$, puis démontrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!} = 1$.
8. Quelle est la probabilité pour que l'on ne tire jamais de boule blanche ?

Correction.

1. (a) Voici l'arbre de probabilité attendu, où on a fait une branche "vers le haut" si on a tiré une boule blanche, et une branche "vers le bas" si on a tiré une boule noire.

Exercice 39.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

Correction.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}.$$

La suite est décroissante si et seulement si ce rapport est toujours inférieur ou égal à 1. Il atteint sa valeur maximale pour $k = 0$, et donc la suite est décroissante si et seulement si $\lambda \leq 1$.

Exercice 40.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Correction.

On a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}$$

d'où

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} \geq 1 \iff k \leq \lambda - 1.$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $\lambda - 1 < 0$, c'est-à-dire $\lambda \in]0, 1[$, la suite $(P(X = k))$ est strictement décroissante, et donc son maximum est atteint en $P(X = 0)$.
2. si λ est un entier, la suite est strictement croissante jusqu'à $\lambda - 1$, strictement décroissante à partir de λ et le maximum est atteint en deux points : $P(X = \lambda - 1)$ et $P(X = \lambda)$.
3. Si λ n'est pas un entier, la suite est strictement croissante jusqu'à $\lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1$, puis strictement décroissante ensuite. La valeur maximale est donc $P(X = \lfloor \lambda \rfloor)$.

Exercice 41.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$.

Exercice 42.

Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.

1. (a) On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé ?
(b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné ?
2. On suppose que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé ?

Correction.

1. (a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans cet hôpital. Alors X suit une loi de Poisson de paramètre 8, et on cherche $P(X \geq 11)$, ou encore $1 - P(X \leq 10)$. A l'aide d'un tableur, on trouve grâce à la formule **=1-LOI.POISSON(10,8,1)** une probabilité d'environ 0,184.
- (b) Numérotions les hôpitaux de 1 à 10 et notons A_k l'événement : "le k -ième hôpital est saturé". Alors on sait que $P(A_k) \simeq 0,13$. L'événement B "aucun hôpital n'est saturé" est égal à

$$B = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{10}}.$$

Comme les événements $A_1, \dots, A_{10}$ sont indépendants, on a

$$P(B) = \prod_{i=1}^{10} P(\overline{A_i}) = (1 - P(A_1))^{10}.$$

Finalement, la probabilité recherchée vaut

$$1 - P(B) = 1 - (1 - P(A_1))^{10} \simeq 0,87.$$

2. Notons X_k la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans l'hôpital k , et $Y = X_1 + \cdots + X_{10}$. On cherche $P(Y \geq 101)$. Or, chaque X_k suit une loi de Poisson de paramètre 8, et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{10}$ sont indépendantes. Donc Y suit une loi de Poisson de paramètre 80. En raisonnant comme à la première question, on trouve $P(Y \geq 101) \simeq 0,013$. C'est beaucoup moins !

Exercice 43.

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Correction.

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\ &= \frac{e^{-p\lambda} (\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Y suit donc une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 44.

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

- On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A ".
- On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
 - Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .
 - Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
 - En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Correction.

- Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$. Soit D = "l'objet est défectueux". On a $P(D|A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$ et comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A " est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

- On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
 - On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$
 - Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n , qui sont défectueux indépendamment les uns des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n$ suit

une loi binomiale de paramètres n et 0.1 . En particulier, $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$

(c) Comme $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n] P(Y = n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M P[X = k|Y = n] P(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P[X = k|Y = n] P(Y = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^M P[X = k|Y = n] P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^M \frac{n!}{k! (n-k)! n!} (0.9 \cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^M \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

Exercice 45.

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(Z = k|X = n)$.
2. En déduire la loi de Z ?
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Correction.

1. On doit déterminer le nombre d'oeufs éclos sachant que n oeufs ont été pondus. On a alors une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes (l'oeuf i éclos) avec probabilité p

de réussite à chaque fois. On reconnaît donc une loi binomiale et on a

$$P(Z = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

si $0 \leq k \leq n$, $P(Z = k | X = n) = 0$ sinon.

2. On va appliquer la formule des probabilités totales : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n \geq k} P(Z = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

On réindexe la somme en posant $u = n - k$. Il vient

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{u \geq 0} \frac{(\lambda(1-p))^u}{u!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda - \lambda p} \\ &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi, Z suit une loi de Poisson de paramètre λp .

3. L'espérance de Z est donc λp .

Exercice 46.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q .
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Correction.

1. Notons également r la probabilité que la partie soit nulle. On sait que $p + q + r = 1$ et que

$r = P(X = 0) = e^{-a}$ d'où $p + q = 1 - e^{-a}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
 p - q &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n + 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) \\
 &= e^{-a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{2n!} \right) \\
 &= e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} \\
 &= e^{-a} (1 - e^{-a}).
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-2a}) \text{ et } q = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. Si $X = 2n$, alors $G = -X$, sinon $G = X$. G admet une espérance si la famille $(nP(G = n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire si la famille $(nP(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, ce qui est le cas car X suit une loi de Poisson donc admet une espérance. On a donc

$$\begin{aligned}
 E(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-2n) \frac{a^{2n}}{n!} e^{-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-a} \\
 &= - \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{(-a)^n}{n!} e^{-a} \\
 &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-a)^n}{(n-1)!} e^{-a} \\
 &= -(-a) e^{-a} e^{-a} \\
 &= a e^{-2a}.
 \end{aligned}$$

Remarquons que Pierre est avantage à ce jeu.

Exercice 47.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ . Démontrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction.

Fixons $k \geq 0$ et pour $l = 0, \dots, k$, notons A_l l'événement " $X = k$ ", B_l l'événement " $Y = l - k$ ", de sorte que " $Z = k$ " soit la réunion disjointe des événements $A_l \cap B_l$, pour $l = 0, \dots, k$. Par

indépendance des variables aléatoires, on a donc

$$\begin{aligned}
 P(Z = k) &= \sum_{l=0}^k P(X = l)P(Y = k - l) \\
 &= \sum_{l=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} \lambda^l \mu^{k-l} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \lambda^l \mu^{k-l} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k
 \end{aligned}$$

La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit donc bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 48.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ . Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction.

Notons $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_n t^n$ les fonctions génératrices respectives de X , Y et Z . On a donc

$$a_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \text{ et } b_n = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}.$$

La série génératrice de Z est obtenue en effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries. On a donc

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît bien la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire, Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 49.

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois.
 - (a) Écrire une fonction `simul_lancer()` sous Python qui simule cette expérience.
 - (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du premier pile. Quelle est la loi de Y ? Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Correction.

1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. On en déduit : $P(X = 3) = \binom{10}{3}(0,3)^3(1 - 0,3)^{10-3} \simeq 0,27$.

```
1 import math
2 def simul_lancer():
3     n=1
4     while (math.rand()>0.3):
5         n=n+1
6     return n
```

2. (a)

Exercice 50.

On lance une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p . On répète cette expérience de façon indépendante et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient pile.

1. Écrire un algorithme qui simule cette variable aléatoire.
2. Modifier l'algorithme précédent de sorte qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de l'espérance de cette variable aléatoire.

Correction.

```
1 def geometrique(p)
2     n=1
3     while (random()>p):
4         n=n+1
5     return n
```

Exercice 51.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . Calculer $P(Y > X)$.

Correction.

L'événement $Y > X$ est la réunion des événements disjoints $X = k, Y > k$, pour k allant de 1 à $+\infty$. Par indépendance des variables aléatoires X et Y , on a $P(X = k, Y > k) = P(X = k) \times P(Y > k)$. De plus, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on sait que

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } P(Y > k) = (1-q)^k.$$

On en déduit que

$$P(Y > X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-q)((1-p)(1-q))^{k-1} = \frac{p(1-q)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p-pq}{p+q-pq}.$$

Exercice 52.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2 . On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z .

Correction.

1. Il s'agit simplement de calculer la somme d'une série géométrique : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} \\ &= p_1 \frac{q_1^n}{1 - q_1} \\ &= q_1^n \end{aligned}$$

où on a posé $q_1 = 1 - p_1$.

2. Remarquons que $Z > n$ si et seulement si $X > n$ et $Y > n$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(Z > n) &= P(X > n) \times P(Y > n) \\ &= q_1^n q_2^n \end{aligned}$$

3. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement

$Z > n - 1$ est la réunion disjointe de $Z > n$ et $Z = n$. Ainsi,

$$P(Z > n - 1) = P(Z > n) + P(Z = n).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} - q_1^n q_2^n \\ &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} (1 - q_1 q_2) \end{aligned}$$

Si on pose $q = q_1 q_2$ et $p = 1 - q$, alors

$$q_1 q_2 - 1 = p$$

et $P(Z = n) = pq^{n-1}$. La variable aléatoire Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Exercice 53.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z .

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
 - (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
 - (b) En déduire la loi de Z .
2. Méthode 2.
 - (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
 - (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
 - (c) En déduire la loi de Z .

Correction.

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
 - (a) Remarquons qu'il est d'abord impossible que $T > Z$. Ainsi, si $n > m$, on a $P((Z = m) \cap (T = n)) = 0$. Ensuite, si $n = m$, alors on doit avoir $X = Y = m$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = P((X = m) \cap (Y = m)) = p^2 q^{2(m-1)}.$$

Enfin, si $n < m$, l'événement $(Z = m) \cap (T = n)$ est égal à la réunion des deux événements disjoints $(X = m) \cap (Y = n)$ et $(X = n) \cap (Y = m)$. La probabilité de chacun de ces événements étant $p^2 q^{m-1} q^{n-1}$, on a dans ce cas

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = 2p^2 q^{m-1} q^{n-1}.$$

- (b) On va utiliser la formule des probabilités totales. En effet, les événements $(Y = n)$,

pour n parcourant $\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Z = m) \cap (T = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2 q^{m-1} q^{n-1} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2p^2 q^{m-1} \frac{1 - q^{m-1}}{1 - q} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2pq^{m-1} - 2pq^{2m-2} + p^2 q^{2m-1}. \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1 - q} = q^m.$$

(b) Remarquons que l'on a $Z > m$ si et seulement si $X > m$ ou $Y > m$. Utilisant la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, on trouve

$$P(Z > m) = P(X > m) + P(Y > m) - P((X > m) \cap (Y > m)) = 2q^m - q^{2m}.$$

(c) Remarquons que l'événement $(Z > m - 1)$ est réunion disjointe des événements $(Z > m)$ et $Z = m$. On en déduit

$$P(Z > m - 1) = P(Z > m) + P(Z = m)$$

soit encore

$$P(Z = m) = P(Z > m - 1) - P(Z > m) = 2q^{m-1} - q^{2m-2} - 2q^m + q^{2m}.$$

Utilisant $p = 1 - q$, on peut vérifier que les résultats des deux méthodes coïncident.

Exercice 54.

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k + n | X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.

(b) En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d'épreuves de Bernoulli.

2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.

(b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Correction.

1. (a) Notons $q = 1 - p$. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = k) = pq^{k-1}$. On en déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1-q} = q^m.$$

- (b) On commence par remarquer que $(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > k+n | X > n) &= \frac{P((X > k+n) \cap (X > n))}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > k+n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = P(X > k). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est bien sans mémoire. Interprétons ceci en termes d'épreuves de Bernoulli. $P(X > m)$ est la probabilité pour que, dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier succès arrive après la m -ième épreuve. $P_{(X > n)}(X > n+m)$ est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier succès arrive après la $n+m$ -ième épreuve, sachant que les n premières épreuves ont donné lieu à un échec. Dans ce dernier cas, on peut oublier les n premières épreuves dont on connaît le résultat et calculer la probabilité que le premier résultat arrive après m épreuves.

2. (a) Procédons par récurrence. Pour $n \geq 1$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) = "P(X > n) = q^n".$$

Initialisation : la propriété est vraie au rang 1 par définition de q . Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a d'une part

$$P(X > n+1 | X > n) = P(X > 1) = q$$

et d'autre part

$$P(X > n+1 | X > n) = \frac{P((X > n+1) \cap (X > n))}{P(X > n)} = \frac{P(X > n+1)}{q^n}.$$

On déduit que $P(X > n+1) = q^n \cdot q = q^{n+1}$ et que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- (b) Pour $n \geq 1$, on a

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

et donc X suit bien une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 55.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Correction.

Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont X_1 et X_2 . Si $X_1 \neq X_2$, alors la matrice est diagonalisable. Si au contraire $X_1 = X_2$, alors l'espace propre associé à l'unique valeur propre X_1 a pour équation $y = 0$: il est de dimension 1 et A n'est pas diagonalisable. A est donc diagonalisable si et seulement si $X_1 \neq X_2$. Or,

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$

car les variables aléatoires sont indépendantes. On a donc

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

La probabilité recherchée est donc

$$1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

Exercice 56.

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut p , avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note G_1 l'événement "le joueur 1 gagne" et G_2 l'événement "le joueur 2 gagne".

1. En utilisant le système complet d'événements $(A, \bar{A})$ où A est l'événement "le premier lancer amène un 6", démontrer que $P(G_2) = (1-p)P(G_1)$.
2. Démontrer que $P(G_1) + P(G_2) = 1$.
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.
4. Retrouver le résultat en introduisant les événements A_k = "le premier 6 apparaît au k -ème lancer".

Correction.

1. Notons A l'événement : "le premier lancer donne un 6". Alors on a

$$P(G_2) = P_A(G_2)P(A) + P_{\bar{A}}(G_2)P(\bar{A}).$$

Bien sûr, on a $P_A(G_2) = 0$: si le premier lancer amène un 6, le deuxième joueur a perdu. D'autre part, on a $P_{\bar{A}}(G_2) = P(G_1)$. En effet, si le premier lancer n'amène pas un six, alors tout se passe comme si on commençait une nouvelle partie mais avec le deuxième joueur qui tire en premier. On en déduit que

$$P(G_2) = P(G_1)P(\bar{A}) = (1 - p)P(G_1).$$

2. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier 6, $X = +\infty$ si on n'obtient jamais de 6. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p , et donc $P(X < +\infty) = 1$. Mais on a aussi $G_1 \cup G_2 = (X < +\infty)$. D'où le résultat.
3. Comme conséquence du résultat des deux questions précédentes, on trouve

$$(1 - p)P(G_1) + P(G_1) = 1 \implies P(G_1) = \frac{1}{2 - p}$$

d'où on déduit immédiatement que

$$P(G_2) = \frac{1 - p}{2 - p}.$$

4. Le joueur 1 gagne si le premier lancer qui amène un 6 possède un rang impair. On a donc

$$G_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1}.$$

Or, l'événement A_{2k+1} correspondant à $2k$ lancers donnant un nombre différent de 6, chacun avec une probabilité égale à q , et un dernier lancer donnant un 6 avec probabilité p . On a donc

$$P(A_{2k+1}) = pq^{2k}$$

et

$$P(G_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{2k} = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q} = \frac{1}{2 - p}.$$

Remarquons qu'avec les notations de la question 2, on a aussi $A_{2k+1} = "X = 2k + 1"$ ce qui permet de retrouver $P(A_{2k+1})$.

Exercice 57.

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité d'obtenir 6 est p , avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

1. Quelle est la loi de X ?
2. En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs.

Correction.

1. La variable aléatoire X donne le rang du premier succès dans une suite d'expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre p . En particulier, en notant $q = 1 - p$, on a, pour tout $k \geq 1$, $P(X = k) = pq^{k-1}$.
2. Soit A l'événement "le premier joueur gagne". Alors A est la réunion disjointe des événements $\{X = 3k + 1\}$, pour $k \in \mathbb{N}$. On a donc

$$P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = 3k + 1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} pq^{3k} = \frac{p}{1 - q^3} = \frac{1}{1 + q + q^2}.$$

De même, si on note B l'événement "le deuxième joueur gagne", C l'événement "le troisième joueur gagne", B est la réunion disjointe des événements $\{X = 3k + 2\}$, pour $k \in \mathbb{N}$, et C est la réunion disjointe des événements $\{X = 3k + 3\}$, $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$P(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = 3k + 2) = \sum_{k \in \mathbb{N}} pq^{3k+1} = \frac{pq}{1 - q^3} = \frac{q}{1 + q + q^2},$$

$$P(C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = 3k + 3) = \sum_{k \in \mathbb{N}} pq^{3k+2} = \frac{pq^2}{1 - q^3} = \frac{q^2}{1 + q + q^2},$$

On remarque que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, ce qui signifie que presque sûrement, un des trois joueurs gagne (ou encore que presque sûrement, la partie ne dure pas indéfiniment).

Exercice 58.

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance.
 - (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m . On note Z le nombre d'appels traités en retard.
 - (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
 - (b) En déduire la probabilité de " $Z = k$ et $Y = n$ ".
 - (c) Déterminer la loi de Z . On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance?

Correction.

1. (a) Notons $X_i, i = 1, \dots, 4$ valant 1 si le client subit un retard à son i -ème appel et 0 sinon. Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/4$. Puisque $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/4)$. En particulier, on a :

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

- (b) On cherche $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. (a) On note $p = 0,25$ et $q = 1 - 0,25$. Comme à la première question, on reconnaît le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p . On a donc :

$$P(Z = k | Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

- (b) On a :

$$\begin{aligned} P(Z = k, Y = n) &= P(Y = n) P(Z = k | Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-m} \frac{m^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z = k, Y = n) \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k e^{mq} \\ &= e^{-mp} \frac{(mp)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

3. U est le rang du premier succès au cours d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/4$. U suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k \geq 1$,

$$P(U = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance et on trouve que

$$E(U) = 4.$$

Exercice 59.

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p , où $p \in]0, 1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le n -ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $A_1, \dots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Correction.

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile ; elle suit la loi géométrique de paramètre p , donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Soit $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1 = \dots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \dots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, \dots, X_{i_1+\dots+i_n} = 1.$$

Donc, en posant $q = 1 - p$, on a :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1} p q^{i_2-1} p \dots q^{i_n-1} p.$$

En sommant pour $(i_1, \dots, i_{n-1})$ parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1} p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p . De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = P(A_1 = i_1) \dots P(A_n = i_n),$$

ce qui montre que les variables $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes.

Exercice 60.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $Y_1, \dots, Y_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . Démontrer que $Y_1 + \dots + Y_r$ a la même loi que X .
3. En déduire l'espérance de X et sa variance.

Correction.

1. Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots\}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc

$\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

- On peut proposer deux raisonnements très différents pour cette question. Le premier est calculatoire, en calculant effectivement (par exemple, par récurrence sur r), la quantité $P(Y_1 + \dots + Y_r = k)$. Le seconde est probabiliste. On considère une suite de lancers indépendants de la pièce de monnaie considérée dans l'énoncé. Notons Y_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir pile. Alors Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p . Le première pile étant obtenu, notons Y_2 le nombre de lancers nécessaires, depuis le premier pile, pour obtenir pour la première fois un autre pile. La variable aléatoire Y_2 suit aussi une loi géométrique. Plus généralement, notons Y_i le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile après le $i-1$ -ème pile. Les Y_i suivent des lois géométriques de paramètre p et sont indépendantes. De plus, $Y_1 + \dots + Y_r$ compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r piles. On a donc $X = Y_1 + \dots + Y_r$, ce qui donne le résultat.
- Par linéarité de l'espérance et de la variance (pour des variables aléatoires indépendantes), on a

$$E(X) = E(Y_1) + \dots + E(Y_r) = \frac{r}{p}, \quad V(X) = V(Y_1) + \dots + V(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exercice 61.

On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $(n, b) \in \mathbb{N}^2$. Les boules sont supposées indiscernables au toucher. On notera $p = n/(n+b)$ et $q = 1-p = b/(n+b)$. On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans cette urne. Après chaque tirage, la boule piochée est remise dans l'urne. La composition de l'urne est donc identique pour tous les tirages. On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé (Ω, P) permettant d'étudier cette expérience. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera N_k l'événement "obtenir une boule noire au k -ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k -ième tirage". On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient d'abord $i \in \mathbb{N}^*$ boules successives d'une même couleur, puis $j \in \mathbb{N}^*$ boules successives de l'autre couleur, puis une boule de la couleur initiale. La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage. Par exemple, l'événement $(X = 4 \cap Y = 2)$ correspond à "obtenir successivement 4 boules noires, puis 2 blanches, puis 1 noire" ou à "obtenir successivement 4 boules blanches, puis 2 noires, puis 1 blanche".

- Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X = i \cap Y = j)$.
- En déduire la loi de X , puis la loi de Y .
- Montrer que X admet une espérance, puis la calculer. Vérifier que $E(X) \geq 2$.
- Montrer que Y admet une espérance, puis que $E(Y) = 2$.
- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = n \cap Y = n) = (pq)^n$, puis en déduire $P(X = Y)$.
- On note $S = X + Y$. Que vaut $S(\Omega)$? Déterminer la loi de S .

Correction.

1. L'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ correspond à deux cas :
 - on obtient i boules noires, puis j boules blanches, puis une boule noire. Cet événement a pour probabilité $p^i q^j p = p^{i+1} q^j$.
 - on obtient i boules blanches, puis j boules noires, puis une boule blanche. Cet événement a pour probabilité $q^i p^j q = p^j q^{i+1}$.

On a donc

$$P(X = i \cap Y = j) = p^{i+1} q^j + p^j q^{i+1}.$$

2. La famille $(Y = j)_{j \geq 1}$ forme un système complet d'événements. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j \\ &= \frac{p^{i+1} q}{1 - q} + \frac{q^{i+1} p}{1 - p} \\ &= p^i q + q^i p \end{aligned}$$

en simplifiant les fractions par la relation $q = 1 - p$. De la même façon, on trouve pour Y

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j \\ &= \frac{p^2 q^j}{1 - p} + \frac{q^2 p^j}{1 - q} \\ &= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}. \end{aligned}$$

3. Les sommes $\sum_i i p^i$ et $\sum_i i q^i$ sont convergentes. De plus, d'après la formule donnant l'espérance d'une loi géométrique, on sait que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i p q^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

On en déduit ici que

$$\begin{aligned} E(X) &= p \sum_{i=1}^{+\infty} i p^{i-1} + q \sum_{i=1}^{+\infty} i q^{i-1} \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Or, posons $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Alors il est facile de voir, en étudiant f (par exemple, en la dérivant), que $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$ (le minimum étant atteint en 1). Puisque $E(X) = f(p/q)$, on en déduit que $E(X) \geq 2$.

4. Le raisonnement est entièrement similaire, et on trouve que

$$\begin{aligned} E(Y) &= p \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{j-1} + q \sum_{j=1}^{+\infty} qp^{j-1} \\ &= p \times \frac{1}{p} + q \times \frac{1}{q} = 2. \end{aligned}$$

5. En utilisant le résultat de la première question, on a

$$P(X = n \cap Y = n) = p^{n+1}q^n + q^{n+1}p^n = (p+q)p^nq^n = (pq)^n.$$

On en déduit que

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n \cap Y = n) = \frac{pq}{1-pq}.$$

6. On a $S(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$. De plus, l'événement $S = k$ est la réunion disjointe des événements $(X = i) \cap (Y = k - i)$ pour $i = 1, \dots, k - 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p^{i+1}q^{k-i} + p^{k-i}q^{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i}{q^i}pq^k + \frac{q^i}{p^i}qp^k. \end{aligned}$$

Si $p = q = 1/2$, on obtient

$$P(S = k) = (k-1)pq^k + (k-1)qp^k = \frac{k-1}{2^k}.$$

Si $p \neq q$, alors

$$\begin{aligned} P(S = k) &= pq^k \frac{\frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q}\right)^k}{1 - \frac{p}{q}} + p^k \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \frac{q}{p}} \\ &= \frac{p^2q^k - qp^{k+1} - q^2p^k + pq^{k+1}}{q-p}. \end{aligned}$$

Exercice 62.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de $n \geq 2$ clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

- La soirée a été un peu arrosée, et, après chaque essai, le concierge remet la clé dans le trousseau. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
 - Quelle est la loi de X (on reconnaîtra une loi classique) ?
 - Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?
- Le concierge est en réalité accompagné de Sam, qui n'a pas bu. Sam élimine donc après

chaque essai infructueux la clé qui n'a pas convenu. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

- (a) Quelles valeurs peut prendre Y ?
- (b) Déterminer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$.
- (c) On note E_i l'événement "on fait au moins i essais et le i -ème ne convient pas" et S_i l'événement "on fait au moins i essais et le i -ème convient". Déterminer, pour $2 \leq i \leq n$, les probabilités conditionnelles

$$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}).$$

- (d) En remarquant que l'événement $Y = k$ est égal à $S_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1$, déterminer la loi de Y .
- (e) Quel est, dans cette situation, le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Correction.

1. (a) On est dans le cadre d'une répétition indépendante d'expériences de Bernoulli, avec probabilité $1/n$ de réussite et la variable aléatoire X désigne le rang du premier succès. X suit donc une loi géométrique de paramètre $1/n$. Autrement dit, pour tout $k \geq 1$, on a $P(X = k) = (1 - \frac{1}{n})^{k-1} \frac{1}{n}$.

- (b) Par les formules du cours, le nombre moyen d'essais est

$$E(X) = n.$$

2. (a) Comme on retire une clé à chaque essai infructueux, Y ne peut prendre ses valeurs que dans $\{1, \dots, n\}$.
- (b) Il est clair que $P(Y = 1) = 1/n$. Pour calculer $P(Y = 2)$, on peut faire un arbre de probabilité représentant les deux premiers choix de clés. On peut aussi, en utilisant les notations de la question suivante, remarquer que

$$P(Y = 2) = P(S_2 \cap E_1) = \frac{P(S_2|E_1)}{P(E_1)} = \frac{1/(n-1)}{(n-1)/n} = \frac{1}{n}.$$

- (c) Lorsque les événements $E_1 \cap \dots \cap E_{i-1}$ sont réalisés, le trousseau n'est plus constitué que de $n + 1 - i$ clés. On a donc

$$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) = \frac{n-i}{n+1-i} \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) = \frac{1}{n+1-i}.$$

- (d) On va appliquer la formule des probabilités composées. Elle donne

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(S_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \\ &= P(S_k|E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \times P(E_{k-1}|E_{k-2} \cap \dots \cap E_1) \times \dots \times P(E_1) \\ &= \frac{1}{n+1-k} \times \frac{n+1-k}{n+2-k} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire Y suit donc "tout simplement" une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

- (e) Le nombre moyen d'essais est l'espérance de Y , qui vaut $\frac{n+1}{2}$. Ce n'est pas si différent !

Exercice 63.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Correction.

1. Notons X la variable aléatoire du nombre d'essais à effectuer avant d'ouvrir la porte. Il est un peu difficile de calculer directement $P(X = k)$, nous allons plutôt calculer, pour $k = 1, \dots, n-1$, $P(X > k)$. L'événement $(X > k)$ est réalisé si et seulement si, la première clé n'a pas convenu et la deuxième clé n'a pas convenu, et..., et la k -ième clé n'a pas convenu. Pour la clé numéro i , il y a avait une clé parmi $n - i + 1$ qui convenait. La probabilité que la clé numéro i ne convenait pas est donc $1 - \frac{1}{n-i+1}$. Par la formule des probabilités composées, notant A_i l'événement "on fait au moins i essais et le i -ème ne convient pas", on a

$$\begin{aligned}
 P(X > k) &= P(A_k) \\
 &= P(A_k | A_{k-1}) P(A_{k-1} | A_{k-2}) \cdots P(A_1) \\
 &= \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right) \\
 &= \prod_{i=1}^k \frac{n-i}{n-i+1} \\
 &= \frac{n-k}{n}.
 \end{aligned}$$

On a ensuite

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Son espérance (le nombre moyen d'essais pour ouvrir la porte) vaut donc

$$E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

2. On garde les mêmes notations. On a cette fois $P(A_i | A_{i-1}) = \frac{n-1}{n}$ et donc

$$P(X > k) = \frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

On en déduit que

$$P(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{(n-1)^k}{n^k} = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}.$$

En reconnaissant une loi géométrique de paramètre $1/n$, on trouve que le nombre moyen d'essais nécessaires est

$$E(X) = n.$$

Finalement, ce n'est pas si différent !

Exercice 64.

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n , il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de X .
3. Soit $Y = X - s + 1$. Démontrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p .
4. En déduire l'espérance et la variance de X .
5. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d . L'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet l'existence de D_s). Établir que $D_s = S_1 + S_2$, avec

$$S_1 = \sum_{n=s}^d (d - n)P(X = n), \quad S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d)P(X = n).$$

6. Soit la suite (u_k) définie pour $k \geq 0$ par

$$u_k = \sum_{i=0}^k (k - i)(1 - p)^i.$$

Démontrer que pour tout $k \geq 0$, $u_{k+1} = (1 - p)u_k + k + 1$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$,

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1 - p}{p^2} + \frac{1 - p}{p^2}(1 - p)^k.$$

8. En déduire une expression de S_1 en fonction de d et s .
9. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X - d)$. En déduire la valeur de S_2 puis celle de D_s .
10. Démontrer que D_s est minimal pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Correction.

1. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cap [s, +\infty[$.
2. Soit $k \geq s$. Notons A_k l'événement "la place face au numéro k est libre". Alors on a

$$"X = k" = A_k \cap \overline{A_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{A_s}.$$

Comme les événements sont indépendants, on a

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-s}.$$

3. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(Y = k) = P(X = k + s - 1) = p(1 - p)^{k-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p .

4. On a $E(Y) = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. Ainsi,

$$E(X) = E(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1 \text{ et } V(X) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5. Par le théorème de transfert, puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cap [s, +\infty[$,

$$D_s = E(|X - d|) = \sum_{n=s}^{+\infty} P(X = n)|n - d|.$$

On coupe ensuite la somme en d et on remarque que si $n \leq d$, $|n - d| = d - n$ alors que si $n \geq d + 1$, $|n - d| = n - d$.

6. En effectuant un changement d'indice $j = i - 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)(1-p)^i \\ &= k+1 + \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)(1-p)^i \\ &= k+1 + \sum_{j=0}^k (k-j)(1-p)^{j+1} \\ &= k+1 + (1-p) \sum_{j=0}^k (k-j)(1-p)^j \\ &= k+1 + (1-p)u_k. \end{aligned}$$

7. Démontrons cette propriété par récurrence. D'une part, $u_0 = 0$ et la formule donnée vaut aussi 0 pour $k = 0$. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k.$$

Alors,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= k+1 + (1-p)u_k \\ &= k+1 + (1-p)\frac{k}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1} \\ &= \frac{k+1}{p} + 1 - \frac{1}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1} \\ &= \frac{k+1}{p} + \frac{p^2 - p - (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1} \\ &= \frac{k+1}{p} + \frac{-1+p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1}. \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $k + 1$ et par le principe de récurrence, elle est vérifiée pour tout $k \geq 0$.

8. On a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=s}^d (d-n)p(1-p)^{n-s} \\ &= p \sum_{i=0}^{d-s} (d-s-i)(1-p)^i \\ &= pu_{d-s}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_1 = (d-s) - \frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p}(1-p)^{d-s}.$$

9. On a

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n)P(X=n) \\ &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n) + \sum_{n=s}^d (n-d)P(X=n) \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d)P(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n)P(X=n) \\ &= E(X-d) \\ &= \frac{1}{p} + s - d - 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$D_s = S_1 + S_2 = 2S_1 + \frac{1}{p} + s - d - 1 = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}.$$

10. On calcule

$$\begin{aligned} D_{s+1} - D_s &= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s} - \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1} \\ &= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1 - (1-p)) \\ &= -1 + 2(1-p)^{d-s} \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte du fait que $\ln(1-p) < 0$,

$$\begin{aligned} D_{s+1} - D_s \leq 0 &\iff (1-p)^{d-s} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff (d-s) \ln(1-p) \leq -\ln 2 \\ &\iff (d-s) \geq \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)} \\ &\iff s \leq \alpha. \end{aligned}$$

Si α est entier, alors D_s est minimal pour $s = \alpha + 1$ (et dans ce cas $D_{s-1} = D_s$). Si α n'est pas entier, la valeur minimale est bien atteinte pour le plus petit entier strictement supérieur à α .

Exercice 65.

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pP(X \geq n)$. Déterminer la loi de X .

Correction.

Pour simplifier, notons $p_n = P(X = n)$. La formule avec $n = 1$ donne :

$$p_1 = p \sum_{k \geq 1} p_k = p.$$

Pour $n = 2$, on a

$$p_2 = p \sum_{k \geq 2} p_k = p \left(\sum_{k \geq 1} p_k - p_1 \right) = p(1 - p).$$

Montrons ensuite par récurrence sur k que $p_k = p(1 - p)^{k-1}$. Le résultat est vérifié si $k = 1, 2$, supposons le vérifié jusqu'au rang k et prouvons le au rang $k + 1$. D'après la contrainte imposée par l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p \sum_{j \geq k+1} p_j = p \left(1 - \sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1} \right) \\ &= p \left(1 - p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right) \\ &= p(1-p)^k. \end{aligned}$$

Le résultat est donc prouvé au rang $k + 1$ et par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout k . On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre p .

Exercice 66.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

(c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $(nP(X > n))_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N . On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

- (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X .
- (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
- (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
- (d) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Correction.

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kP(X=k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-k)P(X > k) - nP(X > n) + P(X > 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n). \end{aligned}$$

- (b) On a, pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

- (c) Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. (a) On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k , et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X , on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

(b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(c) On reconnaît ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0, 1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

(d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 67.

Soit $X_0, \dots, X_k$ des variables aléatoires sur l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit T une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{0, \dots, k\}$. On suppose que $X_1, \dots, X_k, T$ sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

1. On suppose que les variables aléatoires $X_0, \dots, X_k$ admettent toutes une espérance. Démontrer que Y admet une espérance.
2. On suppose de plus que tous les X_i ont même loi. Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et de $E(T)$.

Correction.

1. On doit prouver la convergence de $\sum_{l \geq 0} lP(Y = l)$ et la convergence de $\sum_{l < 0} |l|P(Y = l)$. Commençons par la première série (la seconde se traite de façon complètement similaire). Soit $N > 0$ et majorons, indépendamment de N , $\sum_{l=0}^N lP(Y = l)$. Pour cela, on introduit, pour $j = 0, \dots, k$, la variable aléatoire $S_j = \sum_{i=0}^j X_i$ et on remarque que $([T = j])_{j=0, \dots, k}$ est un système complet d'événements. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N lP(Y = l) &= \sum_{l=0}^N l \sum_{j=0}^k P(T = j \cap X_1 + \dots + X_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^N lP(T = j \cap X_1 + \dots + X_j = l). \end{aligned}$$

Maintenant, k, j et l étant fixés, les variables aléatoires T et $X_1 + \dots + X_j$ sont indépendantes,

donc les événements $T = j$ et $X_1 + \cdots + X_j = l$ sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N lP(Y = l) &= \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^N lP(T = j)P(X_1 + \cdots + X_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j) \sum_{l=0}^N lP(S_j = l) \end{aligned}$$

Or, S_j , comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance, admet une espérance, et donc $\sum_{l=0}^N lP(S_j = l) \leq E(|S_j|)$. On a donc prouvé que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{l=0}^N lP(Y = l) \leq \sum_{j=0}^k P(T = j)E(|S_j|).$$

Le membre de droite ne dépend plus de N . Ceci prouve que Y admet une espérance.

2. On peut écrire (les sommes et leurs interversions sont légitimes par convergence absolue des séries)

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} lP(Y = l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^k lP(T = j \cap X_1 + \cdots + X_j = l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^k lP(T = j)P(S_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j) \sum_{l \in \mathbb{Z}} lP(S_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j)E(S_j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j)jE(X_0) \\ &= E(T)E(X_0). \end{aligned}$$

Exercice 68.

1. Calculer l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ ; sa variance.
2. Calculer l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Correction.

1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Pour la variance, on a

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On écrit que $k^2 = k(k-1) + k$ et donc

$$E(X^2) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda.$$

On en déduit que

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda.$$

2. Si X suit une loi géométrique de paramètre λ , alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p (1-p)^{k-1}.$$

On rappelle que la série entière "géométrique" $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$ a pour rayon de convergence 1, que sa somme est $\frac{1}{1-t}$, et qu'elle se dérive terme à terme. En particulier, on a

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

On en déduit que

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$