

Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Partie A

Probabilités

1. Espérance, variance**Exercice 1.**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$.

Correction.

Notons $Y = \frac{1}{1+X}$. Y prend ses valeurs dans $\left\{\frac{1}{1+k}; k \geq 0\right\}$ et on a

$$P\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit Y_1, \dots, Y_r des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de pa-

ramètre p . Démontrer que $Y_1 + \dots + Y_r$ a la même loi que X .

3. En déduire l'espérance de X et sa variance.

Correction.

1. Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots\}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

2. On peut proposer deux raisonnements très différents pour cette question. Le premier est calculatoire, en calculant effectivement (par exemple, par récurrence sur r), la quantité $P(Y_1 + \dots + Y_r = k)$. Le seconde est probabiliste. On considère une suite de lancers indépendants de la pièce de monnaie considérée dans l'énoncé. Notons Y_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir pile. Alors Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p . Le première pile étant obtenu, notons Y_2 le nombre de lancers nécessaires, depuis le premier pile, pour obtenir pour la première fois un autre pile. La variable aléatoire Y_2 suit aussi une loi géométrique. Plus généralement, notons Y_i le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile après le $i-1$ -ème pile. Les Y_i suivent des lois géométriques de paramètre p et sont indépendantes. De plus, $Y_1 + \dots + Y_r$ compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r piles. On a donc $X = Y_1 + \dots + Y_r$, ce qui donne le résultat.
3. Par linéarité de l'espérance et de la variance (pour des variables aléatoires indépendantes), on a

$$E(X) = E(Y_1) + \dots + E(Y_r) = \frac{r}{p}, \quad V(X) = V(Y_1) + \dots + V(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exercice 3.

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de $n \geq 2$ clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. La soirée a été un peu arrosée, et, après chaque essai, le concierge remet la clé dans le trousseau. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
 - (a) Quelle est la loi de X (on reconnaîtra une loi classique) ?
 - (b) Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?
2. Le concierge est en réalité accompagné de Sam, qui n'a pas bu. Sam élimine donc après chaque essai infructueux la clé qui n'a pas convenu. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
 - (a) Quelles valeurs peut prendre Y ?
 - (b) Déterminer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$.
 - (c) On note E_i l'événement "on fait au moins i essais et le i -ème ne convient pas" et S_i l'événement "on fait au moins i essais et le i -ème convient". Déterminer, pour

$2 \leq i \leq n$, les probabilités conditionnelles

$$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}).$$

- (d) En remarquant que l'événement $Y = k$ est égal à $S_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1$, déterminer la loi de Y .
- (e) Quel est, dans cette situation, le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Correction.

1. (a) On est dans le cadre d'une répétition indépendante d'expériences de Bernoulli, avec probabilité $1/n$ de réussite et la variable aléatoire X désigne le rang du premier succès. X suit donc une loi géométrique de paramètre $1/n$. Autrement dit, pour tout $k \geq 1$, on a $P(X = k) = (1 - \frac{1}{n})^{k-1} \frac{1}{n}$.

- (b) Par les formules du cours, le nombre moyen d'essais est

$$E(X) = n.$$

2. (a) Comme on retire une clé à chaque essai infructueux, Y ne peut prendre ses valeurs que dans $\{1, \dots, n\}$.
- (b) Il est clair que $P(Y = 1) = 1/n$. Pour calculer $P(Y = 2)$, on peut faire un arbre de probabilité représentant les deux premiers choix de clés. On peut aussi, en utilisant les notations de la question suivante, remarquer que

$$P(Y = 2) = P(S_2 \cap E_1) = \frac{P(S_2|E_1)}{P(E_1)} = \frac{1/(n-1)}{(n-1)/n} = \frac{1}{n}.$$

- (c) Lorsque les événements $E_1 \cap \dots \cap E_{i-1}$ sont réalisés, le trousseau n'est plus constitué que de $n + 1 - i$ clés. On a donc

$$P(E_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) = \frac{n-i}{n+1-i} \text{ et } P(S_i|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}) = \frac{1}{n+1-i}.$$

- (d) On va appliquer la formule des probabilités composées. Elle donne

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(S_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \\ &= P(S_k|E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \times P(E_{k-1}|E_{k-2} \cap \dots \cap E_1) \times \dots \times P(E_1) \\ &= \frac{1}{n+1-k} \times \frac{n+1-k}{n+2-k} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire Y suit donc "tout simplement" une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

- (e) Le nombre moyen d'essais est l'espérance de Y , qui vaut $\frac{n+1}{2}$. Ce n'est pas si différent !

Exercice 4.

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2 , p_3 , p_4 .
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n .
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Correction.

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au k -ième lancer. L'événement $(X = 2)$ correspond à :

$$(X = 2) = P_1P_2 \implies p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$(X = 3) = F_1P_2P_3 \implies p_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Pour $(X = 4)$, cela se corse un peu !

$$(X = 4) = F_1F_2P_3P_4 \cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X = n$, on peut :
 - ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer. Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X = 2$), donc avec une probabilité de $1/3$. Puis il reste $n - 2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n - 2$ -ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2} . On a donc

$$P(X = n|P_1) = \frac{1}{3}p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

- ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n - 1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n - 1$ -ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1} . On a donc

$$P(X = n|F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n \geq 2$, on a

$$p_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_2 et p_3). On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $n = 1$ puisqu'on a alors $p_1 = 0$.

4. Il est bien connu que pour tout $q \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit, après un peu de calculs :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}.$$

En moyenne, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, il faudra $15/4$ lancers (non entier !) pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs.

Exercice 5.

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \dots, n$. On suppose que le premier saut est toujours réussi et que, en supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ème saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : « le sauteur a tenté et réussi son k -ème saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Écrire une fonction Python `simuLX()` qui simule la variable aléatoire X .
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .
3. Déterminer $P(X = 1)$.
4. Justifier que « $X = 2$ » = $S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $P(X = 2)$.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, $P(X = n) = \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
6. Démontrer que X admet une espérance, puis calculer cette espérance. On pourra utiliser sans démonstration que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice 6.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q .
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Correction.

1. Notons également r la probabilité que la partie soit nulle. On sait que $p + q + r = 1$ et que $r = P(X = 0) = e^{-a}$ d'où $p + q = 1 - e^{-a}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} p - q &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n + 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) \\ &= e^{-a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{2n!} \right) \\ &= e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} \\ &= e^{-a} (1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-2a}) \text{ et } q = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. Si $X = 2n$, alors $G = -X$, sinon $G = X$. G admet une espérance si la famille $(nP(G = n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire si la famille $(nP(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, ce qui est le cas car X suit une loi de Poisson donc admet une espérance. On a donc

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-2n) \frac{a^{2n}}{n!} e^{-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-a} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{(-a)^n}{n!} e^{-a} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-a)^n}{(n-1)!} e^{-a} \\ &= -(-a)e^{-a}e^{-a} \\ &= ae^{-2a}. \end{aligned}$$

Remarquons que Pierre est avantagé à ce jeu.

Exercice 7.

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p , où $p \in]0, 1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le n -ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que A_1, \dots, A_n sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Correction.

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile; elle suit la loi géométrique de paramètre p , donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Soit $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1 = \dots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \dots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, \dots, X_{i_1+\dots+i_n} = 1.$$

Donc, en posant $q = 1 - p$, on a :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1} p q^{i_2-1} p \dots q^{i_n-1} p.$$

En sommant pour (i_1, \dots, i_{n-1}) parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1} p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p . De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = P(A_1 = i_1) \dots P(A_n = i_n),$$

ce qui montre que les variables A_1, \dots, A_n sont indépendantes.

Exercice 8.

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n , il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de X .
3. Soit $Y = X - s + 1$. Démontrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p .
4. En déduire l'espérance et la variance de X .
5. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d . L'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet l'existence de D_s). Établir que $D_s = S_1 + S_2$, avec

$$S_1 = \sum_{n=s}^d (d-n)P(X=n), \quad S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n).$$

6. Soit la suite (u_k) définie pour $k \geq 0$ par

$$u_k = \sum_{i=0}^k (k-i)(1-p)^i.$$

Démontrer que pour tout $k \geq 0$, $u_{k+1} = (1-p)u_k + k + 1$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$,

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k.$$

8. En déduire une expression de S_1 en fonction de d et s .

9. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X - d)$. En déduire la valeur de S_2 puis celle de D_s .

10. Démontrer que D_s est minimal pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Correction.

1. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cap [s, +\infty[$.

2. Soit $k \geq s$. Notons A_k l'événement "la place face au numéro k est libre". Alors on a

$$"X = k" = A_k \cap \overline{A_{k-1}} \cap \dots \cap \overline{A_s}.$$

Comme les événements sont indépendants, on a

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-s}.$$

3. Y prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* . De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(Y = k) = P(X = k + s - 1) = p(1-p)^{k-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p .

4. On a $E(Y) = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. Ainsi,

$$E(X) = E(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1 \text{ et } V(X) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5. Par le théorème de transfert, puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cap [s, +\infty[$,

$$D_s = E(|X - d|) = \sum_{n=s}^{+\infty} P(X = n)|n - d|.$$

On coupe ensuite la somme en d et on remarque que si $n \leq d$, $|n - d| = d - n$ alors que si $n \geq d + 1$, $|n - d| = n - d$.

6. En effectuant un changement d'indice $j = i - 1$, on a

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)(1-p)^i \\
 &= k+1 + \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)(1-p)^i \\
 &= k+1 + \sum_{j=0}^k (k-j)(1-p)^{j+1} \\
 &= k+1 + (1-p) \sum_{j=0}^k (k-j)(1-p)^j \\
 &= k+1 + (1-p)u_k.
 \end{aligned}$$

7. Démontrons cette propriété par récurrence. D'une part, $u_0 = 0$ et la formule donnée vaut aussi 0 pour $k = 0$. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= k+1 + (1-p)u_k \\
 &= k+1 + (1-p)\left(\frac{k}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1}\right) \\
 &= \frac{k+1}{p} + 1 - \frac{1}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1} \\
 &= \frac{k+1}{p} + \frac{p^2 - p - (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1} \\
 &= \frac{k+1}{p} + \frac{-1+p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{k+1}.
 \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $k+1$ et par le principe de récurrence, elle est vérifiée pour tout $k \geq 0$.

8. On a

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{n=s}^d (d-n)p(1-p)^{n-s} \\
 &= p \sum_{i=0}^{d-s} (d-s-i)(1-p)^i \\
 &= pu_{d-s}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_1 = (d-s) - \frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^{d-s}.$$

9. On a

$$\begin{aligned}
 S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n)P(X=n) \\
 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)P(X=n) + \sum_{n=s}^d (n-d)P(X=n) \\
 &= \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d)P(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n)P(X=n) \\
 &= E(X-d) \\
 &= \frac{1}{p} + s - d - 1.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$D_s = S_1 + S_2 = 2S_1 + \frac{1}{p} + s - d - 1 = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}.$$

10. On calcule

$$\begin{aligned}
 D_{s+1} - D_s &= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s} - \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1} \\
 &= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1 - (1-p)) \\
 &= -1 + 2(1-p)^{d-s}
 \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte du fait que $\ln(1-p) < 0$,

$$\begin{aligned}
 D_{s+1} - D_s \leq 0 &\iff (1-p)^{d-s} \leq \frac{1}{2} \\
 &\iff (d-s)\ln(1-p) \leq -\ln 2 \\
 &\iff (d-s) \geq \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)} \\
 &\iff s \leq \alpha.
 \end{aligned}$$

Si α est entier, alors D_s est minimal pour $s = \alpha + 1$ (et dans ce cas $D_{s-1} = D_s$). Si α n'est pas entier, la valeur minimale est bien atteinte pour le plus petit entier strictement supérieur à α .

Exercice 9.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

- (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $(nP(X > n))_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N . On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

- (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X .
 (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
 (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
 (d) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Correction.

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-k)P(X > k) - nP(X > n) + P(X > 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n). \end{aligned}$$

- (b) On a, pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

- (c) Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X = k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. (a) On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k , et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X , on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{k^n - (k - 1)^n}{N^n}.$$

- (b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

- (c) On reconnaît ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0, 1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

- (d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 10.

Soit X_0, \dots, X_k des variables aléatoires sur l'univers Ω à valeurs dans \mathbb{Z} . Soit T une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{0, \dots, k\}$. On suppose que X_1, \dots, X_k, T sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

1. On suppose que les variables aléatoires X_0, \dots, X_k admettent toutes une espérance. Démontrer que Y admet une espérance.
2. On suppose de plus que tous les X_i ont même loi. Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et de $E(T)$.

Correction.

1. On doit prouver la convergence de $\sum_{l \geq 0} lP(Y = l)$ et la convergence de $\sum_{l < 0} |l|P(Y = l)$. Commençons par la première série (la seconde se traite de façon complètement similaire). Soit $N > 0$ et majorons, indépendamment de N , $\sum_{l=0}^N lP(Y = l)$. Pour cela, on introduit, pour $j = 0, \dots, k$, la variable aléatoire $S_j = \sum_{i=0}^j X_i$ et on remarque que $([T = j])_{j=0, \dots, k}$

est un système complet d'événements. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^N lP(Y = l) &= \sum_{l=0}^N l \sum_{j=0}^k P(T = j \cap X_1 + \dots + X_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^N lP(T = j \cap X_1 + \dots + X_j = l).\end{aligned}$$

Maintenant, k, j et l étant fixés, les variables aléatoires T et $X_1 + \dots + X_j$ sont indépendantes, donc les événements $T = j$ et $X_1 + \dots + X_j = l$ sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^N lP(Y = l) &= \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^N lP(T = j)P(X_1 + \dots + X_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j) \sum_{l=0}^N lP(S_j = l)\end{aligned}$$

Or, S_j , comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance, admet une espérance, et donc $\sum_{l=0}^N lP(S_j = l) \leq E(|S_j|)$. On a donc prouvé que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{l=0}^N lP(Y = l) \leq \sum_{j=0}^k P(T = j)E(|S_j|).$$

Le membre de droite ne dépend plus de N . Ceci prouve que Y admet une espérance.

2. On peut écrire (les sommes et leurs interversions sont légitimes par convergence absolue des séries)

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} lP(Y = l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^k lP(T = j \cap X_1 + \dots + X_j = l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^k lP(T = j)P(S_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j) \sum_{l \in \mathbb{Z}} lP(S_j = l) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j)E(S_j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(T = j)jE(X_0) \\ &= E(T)E(X_0).\end{aligned}$$

2. Fonctions génératrices

Exercice 11.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Correction.

Il faut et il suffit que $p_n \geq 0$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Implicitement, on remarque qu'il faut avoir $a \neq -1$, sinon la suite (p_n) n'est pas définie. On remarque d'abord que l'on ne peut pas avoir $k = 0$, sinon $p_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et la deuxième condition ne peut pas être satisfaite. Le cas $a = 0$ entraîne $k = 1$ (dans ce cas, seul p_0 est non nul, avec la convention $0^0 = 1$). Si $a \neq 0$, la première condition appliquée pour $n = 2$ impose $k > 0$. De plus, pour que la série $\sum_n p_n$ converge, on doit avoir

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{a+1} \right| < 1 &\iff \left| \frac{1}{a+1} - 1 \right| < 1 \\ &\iff -1 < \frac{1}{a+1} - 1 < 1 \\ &\iff 0 < \frac{1}{a+1} < 2 \\ &\iff a+1 > \frac{1}{2} \\ &\iff a > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors, comme la série converge, on sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{k}{1 - \frac{a}{a+1}} = k(a+1)$$

et donc on a $k = \frac{1}{a+1}$. Finalement, puisque $k > 0$ et $p_1 > 0$, on doit donc avoir $\frac{a}{a+1} > 0$ ce qui implique $a > 0$ puisqu'on sait déjà que $a+1 > 0$.

Réciproquement, si $a = 0$ et $k = 1$, ou $a > 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$, on vérifie facilement que les deux propriétés précédentes sont vérifiées et donc que (p_n) est une distribution de probabilité. La fonction génératrice est alors donnée par

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n = \frac{k}{1 - \frac{at}{a+1}} = \frac{1}{a+1 - at}.$$

Exercice 12.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ . Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction.

Notons $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_n t^n$ les fonctions génératrices respectives de X , Y et Z . On a donc

$$a_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \text{ et } b_n = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}.$$

La série génératrice de Z est obtenue en effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries. On a donc

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnaît bien la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire, Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 13.

1. Démontrer que toutes les racines (complexes) non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \dots + X^{12}$ sont simples.
2. Peut-on truquer un dé de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Correction.

1. Factorisons P par X^2 . On trouve

$$P(X) = X^2 \times (1 + X + \dots + X^{10}).$$

Les racines de $1 + X + \dots + X^{10}$ sont les racines 11-ièmes de l'unité, excepté 1. Elles sont donc toutes simples.

2. Notons p_i la probabilité que le lancer de dé donne le numéro i , $i = 1, \dots, 6$. Notons X_1 le résultat du premier lancer, et X_2 le résultat du second lancer. Les fonctions génératrices de X_1 et X_2 sont égales et valent

$$f(x) = \sum_{i=1}^6 p_i x^i.$$

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est

$$G_S(x) = (f(x))^2.$$

Ainsi, G_S est un polynôme dont toutes les racines (sur \mathbb{C}) sont de multiplicité paire (donc au moins égale à 2). Or, si S suivait la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$, sa fonction génératrice

serait

$$G_U(x) = \frac{1}{11}(x^2 + \dots + x^{12}).$$

Les racines de G_U , autres que 0, sont de multiplicité au plus égales à 1. On a donc une contradiction.

Exercice 14.

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle fonction génératrice de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

1. Démontrer que le rayon de convergence de G_X est supérieur ou égal à 1.
2. Démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$ et C^∞ sur $] - 1, 1[$.
3. Démontrer que si $G_X = G_Y$ sur $] - 1, 1[$, alors X et Y ont même loi.
4. Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .
5. On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que, pour tout $t \in] - 1, 1[$, on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) , et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (m, p) . On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? Retrouver ce résultat autrement que par les fonctions génératrices.

Correction.

1. Il suffit de démontrer que la série $G_X(t)$ converge pour tout $t \in] - 1, 1[$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|P(X = n)t^n| \leq |t|^n$$

et la série $\sum_{n \geq 0} |t|^n$ converge. Par majoration, la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$ converge absolument, donc converge.

2. G_X définit une fonction C^∞ sur $] - 1, 1[$ car c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$, il suffit de démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, puisque $t \mapsto P(X = n)t^n$ est continue sur $[-1, 1]$. Mais, pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 0$,

$$|P(X = n)t^n| \leq P(X = n)$$

et le terme de droite de cette inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (dont la somme vaut 1). On a donc bien prouvé la convergence normale. Remarquons que cette inégalité aurait aussi pu être utilisée à la première question.

3. Rappelons que si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle ouvert contenant 0, alors tous les coefficients sont égaux. Ainsi, si $G_X = G_Y$ sur l'intervalle $] - 1, 1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n)$. Puisque X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} , ceci signifie que X et Y ont la même loi.

4. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $G_X(t) = (1 - p) + pt$. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = ((1-p) + pt)^n.$$

5. Puisque X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(X + Y = n) = \bigcup_{k=0}^n (X = k) \cap (Y = n - k).$$

Par indépendance de X et de Y , on a donc

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k).$$

Reconnaissant le produit de Cauchy de deux séries entières, on conclut que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X + Y = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n P(X = k) t^k P(Y = n - k) t^{n-k} = G_X(t)G_Y(t).$$

6. On a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (p + (1-p)t)^{n+m}.$$

Ainsi, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n + m$ et p . On pouvait aussi dire que, puisque X est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p et que Y est la somme de m variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p , et puisque X et Y sont indépendantes, $X + Y$ est la somme de $n + m$ variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres p . Ainsi, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Partie B

Calcul différentiel

1. Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 15.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x, y) de A , on a :

$$|f(x, y)| \leq 4\|(x, y)\|_2,$$

où $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0, 0)$.

Correction.

1. On a :

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$

2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore en

$$|xy| \leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x, y)| \leq \frac{3\|(x, y)\|_2^2 + \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}}{\|(x, y)\|_2} \leq 4\|(x, y)\|_2.$$

Ainsi, si (x, y) tend vers 0, on a $|f(x, y)|$ qui tend vers 0.

Exercice 16.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
2. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$

Correction.

1. On a

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y| \leq \|(x, y)\|_1.$$

La limite de f en $(0, 0)$ est donc 0.

2. Non! On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) = -\frac{3}{5}.$$

3. Non!

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = +\infty.$$

Exercice 17.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x, y, z) = \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$;
2. $f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x, \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.
3. $f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{xy^2}$.

Correction.

1. On a d'une part

$$f(1/n, 0, 0) = 0$$

et d'autre part

$$f(1/n, 1/n, 1/n) = \frac{2/n^2}{6/n^2} = \frac{1}{3}.$$

La limite de f en $(0, 0, 0)$ ne peut pas exister.

2. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2) . Or, $x^2 + y^2 - 1$ tend vers -1 , et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part, on a

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1$ quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, et donc $f(x, y)$ tend vers $(-1, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

3. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ si $t \rightarrow 0$. Maintenant, on peut écrire

$$f(x, y) = x \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}.$$

De la remarque précédente, on tire que $\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. On en déduit que $f(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

Exercice 18.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Correction.

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t, t) = \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $1/2$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Dérivées partielles

Exercice 19.

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Correction.

Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable sur \mathbb{R} , ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y.$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(xy) - y(x^2 + y^2) \sin(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy).$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 + x^2 y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1 + x^2 y^2}}.$$

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto (2 + 2t, t^2)$ est de classe C^1 , car polynômiale, donc g est de classe C^1 par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on note $u(t) = 2 + 2t$ et $v(t) = t^2$, alors

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)),$$

soit

$$g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2).$$

2. La fonction $(u, v) \mapsto (uv, u^2 + v^2)$ est de classe C^1 car polynômiale, donc h est de classe C^1 . Notons $r(u, v) = uv$ et $q(u, v) = u^2 + v^2$. Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v), q(u, v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v), q(u, v)).$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Exercice 21.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Correction.

D'une part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{1/4}.$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$. Du fait que $f(0, t) = 0$ pour tout réel t , f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = |t|^{-1/2}.$$

Ceci tend vers $+\infty$ si t tend vers 0, et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$.

Exercice 22.

Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0, 0)$ sans pour autant y être continue.

- $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction.

- Prouvons d'abord que f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, on a

$$f(e^{-n^2}, 1/n) = -1,$$

qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini. Fixons maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et démontrons que f admet une dérivée suivant (a, b) en $(0, 0)$. Soit $t \neq 0$. On a

$$\frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \begin{cases} tb^2 (\ln |t| + \ln |a|) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 (en particulier, parce que $t \ln |t|$ tend vers 0 en 0). Ainsi, f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant le vecteur (a, b) qui est nulle.

- De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0, 0).$$

D'autre part, fixons $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et prouvons que g admet une dérivée suivant (a, b) en $(0, 0)$. On a, pour $t \neq 0$,

$$\frac{g(ta, tb) - g(0, 0)}{t} = \frac{t^3 a^2 b}{t \times (t^4 a^4 + t^2 b^2)} = \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2}.$$

Si $b = 0$, ceci est nul, sinon

$$\frac{g(ta, tb) - g(0, 0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{a^2}{b}.$$

Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée en $(0, 0)$ suivant le vecteur (a, b) qui vaut $\frac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et qui vaut 0 si $b = 0$.

Exercice 23.

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

- $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
- $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Correction.

Il suffit de démontrer que la fonction admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 , et que ces dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 .

1. D'une part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2y^2 \frac{3x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. On a en effet :

$$f(x, 0) - f(0, 0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$. Mais on a, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2|xy| \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{4} |3x^2 + y^2|.$$

On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$.

2. On commence par étudier la continuité de f en $(0, 0)$ (même si ce n'est pas utile pour appliquer le théorème mentionné). On a

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &\leq x^2y^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \times (x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)|. \end{aligned}$$

Du fait que $u \ln u$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0^+ , on en déduit que f est continue en $(0, 0)$. Ensuite, remarquons que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable ailleurs qu'en $(0, 0)$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pour étudier l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$, on étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. On va maintenant prouver la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. Le même raisonnement que pour la continuité de f (en utilisant par exemple $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$) prouve que $2xy^2 \ln(x^2 + y^2)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part,

$$\left| \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2|y|$$

ce qui prouve également que $\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$, et par suite sur \mathbb{R}^2 . Enfin, par symétrie des variables x et y , ce que l'on vient de démontrer est aussi valable pour les dérivées partielles par rapport à la deuxième variable. Ainsi, f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 24.

Les fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R}^2 , sont-elles de classe C^1 ?

1. $f(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
3. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Correction.

On remarque d'abord que, dans les 3 cas, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|,$$

et $|x| \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Ainsi, f est continue en $(0, 0)$. De plus, un calcul facile montre que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En particulier, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, t) = -1$ tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a aucune chance d'être continue en $(0, 0)$ (alors qu'on n'a même pas étudié l'existence d'une dérivée partielle en $(0, 0)$!). Ainsi, f n'est pas de classe C^1 .

2. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} + |y| \times \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, f est continue en $(0, 0)$. D'autre part, un calcul facile montre que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Il vient, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut pas être continue en $(0, 0)$ et f n'est pas C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. On va commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon. Clairement, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, on a $g'(t) = 0$ si $t < 0$ et $g'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$. On a donc $g'(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. On en déduit, par le théorème de prolongement d'une dérivée, que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $g'(0) = 0$. Maintenant, $f = g \circ \phi$ avec $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Par composition, f est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 25.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

- On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer sa dérivée.
- On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

- En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Correction.

- La fonction g est C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 . On a :

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

- On peut alors écrire $g(t) = tf(x, y)$, et le calcul de la dérivée de g donne $g'(t) = f(x, y)$. La comparaison avec l'expression obtenue à la question précédente donne le résultat.
 - Il suffit d'appliquer la relation précédente pour $t = 0$. On a $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Réciproquement, on vérifie facilement qu'une fonction vérifiant $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ vérifie également $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

Exercice 26.

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = x^2(x + y)$.
- $f(x, y) = e^{xy}$.

Correction.

Il suffit de dériver successivement par rapport aux bonnes variables. Remarquons que les fonctions sont clairement de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et donc que les dérivées croisées d'ordre 2 sont égales.

- On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x.$$

- On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy}.$$

Exercice 27.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. f admet-elle un prolongement continu à \mathbb{R}^2 ?
2. f admet-elle un prolongement C^1 à \mathbb{R}^2 ?
3. f admet-elle un prolongement C^2 à \mathbb{R}^2 ?

Correction.

1. Utilisant $2|xy| \leq x^2 + y^2$, il est facile de voir que $f(x, y) \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Ainsi, f admet une limite en $(0, 0)$ et on peut la prolonger par continuité en posant $f(0, 0) = 0$.
2. Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

De plus, $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De

$$|x^4 + 4x^2 y^2 + y^4| \leq x^4 + 4x^2 y^2 + y^4 \leq 2(x^2 + y^2)^2,$$

on tire la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. L'étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est totalement similaire, puisque $f(x, y) = -f(y, x)$. On en déduit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. On va prouver que f ne peut pas être de classe C^2 en niant le théorème de Schwarz. En effet, on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = -1,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe et vaut -1 . Mais on prouve de la même façon que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et vaut 1 . Les deux dérivées partielles croisées n'étant pas égales, la fonction ne peut pas être de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 28.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Correction.

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x, y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + Cte$. Cette constante dépend de y , qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

Puisque f est C^1 , C est également C^1 et la deuxième relation donne

$$C'(y) = 0,$$

c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A.$$

Réciproquement, une telle fonction est solution du système.

2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x, y)$. De $g'(x) = e^xy$, on tire $g(x) = e^xy + cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^xy + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y , et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 + Cte$. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = e^xy + y^2 + A.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions.

3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + C(y)$. On dérive par rapport à y , et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2 , les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.