Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°23

On reprendra aussi la fin du TD 22 !

1. Différentiabilité

Exercice 1.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x,y) = (y\sin x, \cos x)$.

Exercice 2.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\right)$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de f et celle de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 4.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0,0)$?

2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 5.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{ccl}(x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & \mapsto & 0.\end{array}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6.

Soit $\phi: GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R}), M\mapsto M^{-1}$.

1. Démontrer que ϕ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M\in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 7.

Soit $n\geq 2$.

1. Démontrer que l'application déterminant est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $1\leq i,j\leq n$ et $f(t)=\det(I_n+tE_{i,j})$. Que vaut f ?
3. En déduire la valeur de $\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)$.
4. En déduire l'expression de la différentielle de det en I_n.
5. Retrouver ce résultat en calculant $\det(I_n+tH)$ en trigonalisant H.
6. Démontrer que si A est inversible, alors $d_A\det(H)=\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}(A)H)$.
7. Démontrer que la formule précédente reste valide pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

On munit $E=\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\|=\sup_{t\in[0,1]}|P(t)|$. Soit $\phi: E\to\mathbb{R}$, $P\mapsto\int_0^1(P(t))^3dt$. Démontrer que ϕ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Exercice 9.

Soit $E=\mathbb{R}^n$, et soit $\phi:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(u)=u\circ u$. Démontrer que ϕ est de classe C^1.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $u : x \mapsto \langle f(x), f(x)\rangle$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2.$$

Démontrer que f est constante.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Démontrer que $f(0) = 0$.
2. Démontrer que f est linéaire.

2. Fonctions numériques

a. Divers

Exercice 13.

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Déterminer l'équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à $\mathcal{S}$.

Exercice 14.

On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs F dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f tel que $F = grad(f)$. Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent.

1. $F(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$, défini sur $\mathbb{R}^3$.
2. $F(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, défini sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$.

b. Extrema

Exercice 15.

On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 16.

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 17.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Exercice 18.

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Exercice 19.

Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur D.

Exercice 20.

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$;
2. $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1] \times [0,1]$;
3. $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ et $K = [0,\pi/2]^2$.

Exercice 21.

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \exp(axy)$, $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 22.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux ?

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$;
2. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$;
3. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.