

## Corrigé de la feuille d'exercices n°23

On reprendra aussi la fin du TD 22!

## 1. Différentiabilité

### Exercice 1.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1.  $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$ .
2.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ .
3.  $f(x, y) = (y \sin x, \cos x)$ .

### Correction.

1.  $f$  admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y(x + y) + 1) e^{xy}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x(x + y) + 1) e^{xy}.$$

Ces fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , la fonction  $f$  est différentiable, et on a :

$$df_{(x,y)}(h, k) = (h(y(x + y) + 1) + k(x(x + y) + 1))e^{xy}.$$

Avec la notation différentielle, on a (ce qu'on peut obtenir aussi en différenciant directement  $f$ ), on a aussi

$$df = (y(x + y) + 1)e^{xy}dx + (x(x + y) + 1)e^{xy}dy.$$

2.  $f$  est clairement  $C^\infty$ , et est donc différentiable. On a donc

$$df = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz.$$

3.  $f$  est clairement  $C^\infty$ , et est donc différentiable. La différentielle de  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y \cos x, -\sin x)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\sin x, 0).$$

On en déduit que

$$df_{(x,y)}(h, k) = h \begin{pmatrix} y \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1.  $f(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y \right)$ .

2.  $f(x, y) = \left( xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2) \right)$ .

### Correction.

Il suffit de vérifier que les fonctions coordonnées sont différentiables, et elles sont clairement  $C^\infty$ . On a respectivement

1.

$$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(x, y) = (x + y, x - y)$ .

- Justifier que  $f$  et  $g$  sont différentiables en tout vecteur  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , puis écrire la matrice jacobienne de  $f$  et celle de  $g$  en  $(x, y)$ .
- Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer l'image d'un vecteur  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  par l'application linéaire  $d(f \circ g)((x, y))$  en utilisant les deux méthodes suivantes :
  - en calculant  $f \circ g$ ;
  - en utilisant le produit de deux matrices jacobiniennes.

### Correction.

- $f$  et  $g$  sont clairement de classe  $C^\infty$  comme composée de fonctions  $C^\infty$ . De plus, en calculant les dérivées partielles, on montre facilement que

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f) = (2x \cos(x^2 - y^2) \quad -2y \cos(x^2 - y^2))$$

$$\text{Jac}_{(x,y)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) On a  $f \circ g(x, y) = \sin(4xy)$ . On en déduit la matrice jacobienne de  $f \circ g$  en  $(x, y)$ .

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = (4y \cos(4xy) \quad 4x \cos(4xy)).$$

Il vient

$$d(f \circ g)((x, y))(u, v) = \text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4uy \cos(4xy) + 4vx \cos(4xy).$$

(b) D'après la formule de composition des différentielles, on sait que

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \text{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \text{Jac}_{(x,y)}(g).$$

Mais,

$$\text{Jac}_{g(x,y)}f = (2(x+y)\cos(4xy) \quad -2(x-y)\cos(4xy)).$$

Le produit des deux matrices redonne alors le résultat précédent.

#### Exercice 4.

On définit sur  $\mathbb{R}^2$  l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1.  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?
2.  $f$  admet-elle des dérivées partielles en  $(0, 0)$  ?
3.  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ?

#### Correction.

1. Remarquons que  $f(x, x) = 1/2$ , qui ne tend pas vers 0 si  $x$  tend vers 0 :  $f$  n'est pas continue en 0.
2. Puisque  $f(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et vaut 0. De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe, et vaut 0.
3.  $f$  ne peut pas être différentiable puisqu'elle n'est pas continue !

#### Exercice 5.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) &\mapsto 0. \end{aligned}$$

1.  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?
2.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
3.  $f$  est-elle différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?

#### Correction.

1. D'une part,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant par exemple l'inégalité classique  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ ,

puis l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on obtient :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{|x^2 - y^2|}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

ce qui prouve la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

2. Remarquons d'abord que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ , comme quotient de deux fonctions de classe  $C^1$  dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y - y^5 + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, on a  $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$ , ce qui prouve que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et vaut 0. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| &\leq \frac{|x|^4 |y| + |y|^5 + 4|x|^2 |y|^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq \frac{6(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 6(x^2 + y^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$  et  $|y| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Ceci prouve que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe et est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Par (anti)symétrie des rôles joués par  $x$  et  $y$  dans l'expression de  $f(x, y)$ , le même résultat est vrai pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . On a donc prouvé que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

3. Toute fonction de classe  $C^1$  étant différentiable,  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 6.

Soit  $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$ .

- Démontrer que  $\phi$  est différentiable en  $I_n$  et calculer sa différentielle en ce point.
- Même question en  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  quelconque.

### Correction.

Remarquons avant de commencer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et donc il est bien possible de calculer la différentielle de  $\phi$  en un élément de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\|H\| < 1$ . Alors

$$(I_n + H) \times \left( \sum_{k=0}^p (-1)^k H^k \right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}.$$

Puisque  $\|H\| < 1$ ,  $H^p \rightarrow 0$  et donc

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k.$$

On a

$$\|\psi(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|} \leq 2$$

si  $\|H\| \leq 1/2$ . Ainsi,  $\|H^2\psi(H)\| \leq 2\|H\|^2 = o(\|H\|)$  et on a prouvé que

$$\phi(I_n + H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|).$$

Ainsi,  $\phi$  est différentiable en  $I_n$  et sa différentielle vaut  $d\phi_{I_n}(H) = -H$ .

2. Prenons maintenant  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (M^{-1}H)^k M^{-1}$$

pourvu que  $\|M^{-1}H\| < 1$ . Il vient, par un raisonnement identique à celui de la première question,

$$\phi(M + H) = \phi(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|).$$

Ainsi,  $\phi$  est différentiable en  $M$  et  $d\phi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$ .

### Exercice 7.

Soit  $n \geq 2$ .

1. Démontrer que l'application déterminant est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $1 \leq i, j \leq n$  et  $f(t) = \det(I_n + tE_{i,j})$ . Que vaut  $f$  ?
3. En déduire la valeur de  $\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)$ .
4. En déduire l'expression de la différentielle de  $\det$  en  $I_n$ .
5. Retrouver ce résultat en calculant  $\det(I_n + tH)$  en trigonalisant  $H$ .
6. Démontrer que si  $A$  est inversible, alors  $d_A \det(H) = \text{Tr}({}^t \text{comat}(A)H)$ .
7. Démontrer que la formule précédente reste valide pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Correction.

1. L'expression du déterminant (ou son développement suivant une ligne ou une colonne) montre qu'il s'agit d'un polynôme en les coefficients de la matrice. Donc il s'agit d'une fonction de classe  $C^\infty$ .
2. Si  $i = j$ , alors on a  $f(t) = 1 + t$  et si  $i \neq j$ , alors  $f(t) = 1$ .
3. Par définition de la dérivée partielle du déterminant par rapport à la coordonnée donnée par  $E_{i,j}$ , on a

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = f'(0)$$

et cette quantité vaut 1 si  $i = j$ , 0 sinon.

4. Rappelons que  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Toute matrice  $H$  s'écrit  $H = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} E_{i,j}$ . On en déduit que :

$$d_{I_n} \det(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \text{Tr}(H).$$

5. En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres complexes de  $H$ , on a, par trigonalisation, où  $PHP^{-1}$  est triangulaire supérieure,

$$\det(I_n + tH) = \det(I_n + tPHP^{-1}) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) = 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t^2).$$

Ainsi,  $d \det_{I_n}(H) = \text{Tr}(H)$ .

6. On écrit que

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A(I_n + A^{-1}H)) \\ &= \det(A) \times \det(I_n + A^{-1}H) \\ &= \det(A) \times (1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(A) + \text{Tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Ceci démontre que

$$d_A \det(H) = \text{Tr}(\det(A)A^{-1}H).$$

Mais c'est le même résultat que celui donné par l'énoncé, car  $\det(A)A^{-1} = {}^t \text{comat}(A)$ .

7. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Notons  $f$  l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , qui à  $A$  associe  $d_A \det$  et  $g$  l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , qui à  $A$  associe  $H \mapsto \text{Tr}({}^t \text{comat}(A)H)$ . Alors  $f$  et  $g$  sont deux applications continues, et elles coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles, qui est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Cela implique que  $f$  et  $g$  sont égales sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ce qu'il fallait démontrer.

### Exercice 8.

On munit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  de la norme  $\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ . Soit  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$ . Démontrer que  $\phi$  est différentiable sur  $E$  et calculer sa différentielle.

### Correction.

Soient  $P, H \in E$ . On a

$$\phi(P + H) = \int_0^1 (P(t) + H(t))^3 dt = \int_0^1 (P(t))^3 dt + 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = 3 \int_0^1 P(t)(H(t))^2 dt + \int_0^1 (H(t))^3 dt.$$

Or,

$$|\psi(H)| \leq 3 \int_0^1 |P(t)| dt \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi,  $\psi(H) = o(\|H\|)$ . Puisque  $H \mapsto 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$  est linéaire, on a prouvé que  $\phi$  est différentiable en  $P$  et que  $d\phi_P(H) = 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$ .

### Exercice 9.

Soit  $E = \mathbb{R}^n$ , et soit  $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par  $\phi(u) = u \circ u$ . Démontrer que  $\phi$  est de classe  $C^1$ .

#### Correction.

On doit démontrer que  $\phi$  est différentiable en chaque  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et que l'application  $u \mapsto d\phi_u$  est continue. Commençons par calculer la différentielle. On fixe  $u, h \in \mathcal{L}(E)$ . Alors,

$$\phi(u+h) = (u+h) \circ (u+h) = u \circ (u+h) + h \circ (u+h) = u \circ u + u \circ h + h \circ u + h \circ h,$$

où on a utilisé que  $u$  et  $h$  sont linéaires. On a donc

$$\phi(u+h) = \phi(u) + u \circ h + h \circ u + h \circ h.$$

L'application  $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $h \mapsto u \circ h + h \circ u$  est linéaire. Pour démontrer que  $\phi$  est différentiable en  $u$ , il suffit de prouver que  $\|h \circ h\| = o(\|h\|)$ . Mais, si on a muni  $\mathcal{L}(E)$  de la norme d'application linéaire subordonnée à une norme quelconque sur  $E$ , on a

$$\|h \circ h\| \leq \|h\|^2.$$

On a bien prouvé que  $\phi$  est différentiable en  $u$  et que  $d\phi_u(h) = u \circ h + h \circ u$ . Pour prouver que  $u \mapsto d\phi_u$  est continue, on va prouver qu'elle est lipschitzienne. On fixe donc  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , et on remarque que pour tout  $h \in \mathcal{L}(E)$ , on a

$$d\phi_u(h) - d\phi_v(h) = (u-v) \circ h + h \circ (u-v).$$

Ainsi,

$$\|d\phi_u(h) - d\phi_v(h)\| \leq 2\|u-v\| \times \|h\|.$$

Ceci prouve que

$$\|d\phi_u - d\phi_v\| \leq 2\|u-v\|,$$

et donc que l'application  $u \mapsto d\phi_u$  est bien lipschitzienne. Ainsi,  $\phi$  est de classe  $C^1$ .

### Exercice 10.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application différentiable. Calculer la différentielle de  $u : x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$ .

#### Correction.

Notons  $g(x) = \langle x, x \rangle$ , de sorte que  $u = g \circ f$ . Par composée,  $du_x(h) = dg_{f(x)} \circ df_x(h)$ . Or,

$dg_y(h) = 2\langle y, h \rangle$ , ce qu'on peut retrouver en écrivant

$$\langle y + h, y + h \rangle = \langle y, y \rangle + 2\langle y, h \rangle + \|h\|^2.$$

On en déduit que  $du_x(h) = 2\langle f(x), df_x(h) \rangle$ .

### Exercice 11.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2.$$

Démontrer que  $f$  est constante.

### Correction.

Fixons  $x \in \mathbb{R}^2$ . Alors, pour  $h \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \|h\|^2 \implies f(x+h) = f(x) + o(\|h\|).$$

Ceci signifie que  $f$  est différentiable en  $x$  et que  $df_x = 0$ . En particulier,  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $\mathbb{R}^2$  est convexe (donc connexe par arcs), ceci implique que  $f$  est constante.

### Exercice 12.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable. On suppose que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

1. Démontrer que  $f(0) = 0$ .
2. Démontrer que  $f$  est linéaire.

### Correction.

1. On a  $f(0) = f(0 \times x) = 0f(x) = 0$ ! (question subsidiaire : où vivent ces zéros???)
2. On fixe  $x \in \mathbb{R}^n$ , et on écrit que  $f$  est différentiable en 0. On a donc

$$f(\lambda x) =_{\lambda \rightarrow 0} f(0) + df_0(\lambda x) + o(\lambda).$$

D'après la relation vérifiée par  $f$  et puisque  $f(0) = 0$ , on a

$$\lambda f(x) =_{\lambda \rightarrow 0} \lambda df_0(x) + o(\lambda).$$

On simplifie par  $\lambda$  et on trouve

$$f(x) =_{\lambda \rightarrow 0} df_0(x) + o(1).$$

On fait tendre  $\lambda$  vers 0 et on a donc que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$f(x) = df_0(x).$$

Ainsi,  $f$  est linéaire.

## 2. Fonctions numériques

### a. Divers

#### Exercice 13.

On considère  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$$

puis la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $f(x, y, z) = 0$ . Déterminer l'équation du plan tangent en  $(1, 1, 1)$  à  $\mathcal{S}$ .

#### Correction.

$(1, 1, 1)$  n'étant pas un point critique de  $f$ ,  $\mathcal{S}$  admet un plan tangent en  $(1, 1, 1)$  dont l'équation est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)(y - 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)(z - 1) = 0.$$

Un calcul rapide des dérivées partielles permet de conclure que le plan tangent a pour équation :

$$(x - 1) - 5(y - 1) + 2(z - 1) = x - 5y + 2z + 2 = 0.$$

#### Exercice 14.

On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs  $F$  dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire  $f$  tel que  $F = \text{grad}(f)$ . Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent.

1.  $F(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$ , défini sur  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $F(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$ , défini sur  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ .

#### Correction.

1.  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2$ . On résout ce système d'équation aux dérivées partielles : la deuxième équation donne par exemple  $f(x, y, z) = x^2y + h(x, z)$ , et utilisant les deux autres équations, on trouve :

$$f(x, y, z) = x^2y + xz^3 + cste.$$

2.  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

Les fonctions  $f$  qui conviennent sont donc  $f(x, y) = \frac{y}{x-y} + cste$ .

## b. Extrema

### Exercice 15.

On pose  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$  et  $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$ .

1. Déterminer les points critiques de  $f$ , de  $g$ .
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de  $f$ .
3. En étudiant les valeurs de  $g$  sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de  $g$ .

### Correction.

1. On calcule les dérivées partielles de  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y.$$

Si  $(x, y)$  est un point critique de  $f$ , il vérifie donc le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est donc le seul point critique de  $f$ . Un raisonnement tout à fait similaire montre que  $(0, 0)$  est aussi le seul point critique de  $g$ .

2. Les extrema locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si  $(0, 0)$  est un extrémum local.

$$f(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geq 1 = f(0, 0).$$

Ainsi,  $(0, 0)$  est un extrémum local, et même global, de  $f$ .

3. Ici aussi, il suffit de déterminer la nature de  $(0, 0)$ . On a  $g(0, 0) = -2$ . On a également, pour  $x \neq 0$ ,  $g(x, 0) = x^2 - 2 > g(0, 0)$  et  $g(x, -x) = -2x^2 - 2 < g(0, 0)$ . Ainsi, aussi près de  $(0, 0)$  qu'on veut,  $g$  prend des valeurs (strictement) supérieures et (strictement) inférieures à  $g(0, 0)$ . Ainsi,  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum local de  $g$ . Comme  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $g$ ,  $g$  n'admet pas d'extrémum local.

### Exercice 16.

Déterminer les extrema locaux des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes :

1.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2.  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3.  $f(x, y) = x^3 + y^3$
4.  $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6.$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On trouve après résolution du système que seul  $(0, 3)$  est un point critique de  $f$ . Posons  $u = x$  et  $v = y - 3$  pour se ramener en  $(0, 0)$ . Alors

$$f(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geq f(0, 3).$$

Ainsi,  $(0, 3)$  est un minimum local, et même global, de  $f$ .

2. On trouve cette fois  $(1, 1)$  comme unique point critique de  $f$ . En posant  $u = x - 1$  et  $v = y - 1$  (toujours dans l'idée de se ramener en  $(0, 0)$ ), on a

$$f(x, y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u - v)^2 + v^2 \geq f(1, 1).$$

Ainsi,  $(1, 1)$  est un minimum local, et même global, de  $f$ .

3. Le seul point critique est  $(0, 0)$ . On a  $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$  si  $x > 0$  et  $f(x, 0) < 0 = f(0, 0)$  si  $x < 0$ . Ainsi,  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum local de  $f$ .
4. Posons  $u = x - y$ ,  $v = x + y$  et  $g(u, v) = u^2 + v^3$ . Étudier les extrema locaux de  $g$  revient, modulo le changement de variables, à étudier les extrema locaux de  $f$ .  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $g$ , et puisque  $g(0, y) > 0$  si  $y > 0$  et  $g(0, y) < 0$  si  $y < 0$ ,  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum de  $g$ . Donc  $f$  n'admet pas d'extrémum local.

**Exercice 17.**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$  ;
2.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  ;
3.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ .

Correction.

1. On commence par chercher les points critiques de  $f$ . Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à  $x$  et à  $y$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x + 2x^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Un point  $(x, y)$  est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 = 0 \\ 2y = 0. \end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ . On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 + 6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

En  $(0, 0)$ , on obtient donc, avec les notations usuelles,  $r = -2$ ,  $t = 2$  et  $s = 0$ , soit  $rt - s^2 = -4 < 0$ . Le point  $(0, 0)$  est un point col, ce n'est pas un extrémum local de  $f$ . En  $(1, 0)$ , on a  $r = 4$ ,  $t = 2$  et  $s = 0$ , soit  $rt - s^2 = 8 > 0$ . Le point  $(1, 0)$  est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque  $r > 0$ . L'étude en  $(-1, 0)$  donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point  $(x, y)$  est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Ce système implique  $x^4 = x$ , soit  $x = 0$  ou  $x = 1$ . On en déduit facilement que les seuls points critiques de  $f$  sont  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3.$$

En  $(0, 0)$ , on a  $r = 0$ ,  $t = 0$  et  $s = -3$ , soit  $rt - s^2 = -9 < 0$ . Le point  $(0, 0)$  est un point col, ce n'est pas un extrémum local de  $f$ . En  $(1, 1)$ , on a  $r = 6$ ,  $t = 6$  et  $s = -3$ , soit  $rt - s^2 = 27 > 0$ . Puisque de plus  $r > 0$ , le point  $(1, 1)$  est un minimum local de  $f$ .

3. Les dérivées partielles du premier ordre de  $f$  sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 8(x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 8(x - y).$$

Les points critiques sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 = 8(x - y) \\ -4y^3 = 8(x - y). \end{cases}$$

On en déduit que  $x^3 = -y^3 = (-y)^3$ . La fonction cube étant injective, ceci donne encore  $x = -y$ . Si on reporte ceci dans la première équation, on trouve  $4x^3 = 16x$ , soit

$$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x - 2)(x + 2) = 0.$$

On en déduit que les points critiques de  $f$  sont  $(0, 0)$ ,  $(2, -2)$  et  $(-2, 2)$ . Etudions maintenant la nature de ces points critiques. Les dérivées partielles du second ordre sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 8 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 8.$$

En  $(2, -2)$ , avec les notations usuelles, on a  $r = 40$ ,  $t = 40$  et  $s = -8$ . Cette fois,  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$ , donc le point  $(2, -2)$  est un minimum local pour  $f$ . La conclusion est identique en  $(-2, 2)$ . En  $(0, 0)$ , on a  $r = -8$ ,  $t = -8$  et  $s = 8$ , soit  $rt - s^2 = 0$ . On ne peut donc pas conclure directement. Mais, on remarque que  $f(x, 0) = x^4 - 4x^2$  est négatif si  $x$  est petit, alors que  $f(x, x) = 2x^4$  est toujours positif. Ainsi,  $(0, 0)$  n'est ni un maximum, ni un minimum puisque aussi près qu'on veut de  $(0, 0)$ , on a des points  $(x, y)$  avec  $f(x, y) > f(0, 0)$  et d'autres points  $(x, y)$  avec  $f(x, y) < f(0, 0)$ .

**Exercice 18.**

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ;
2.  $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$  sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ;
3.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ;

**Correction.**

1. On calcule les dérivées partielles de  $f$  au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y.$$

Un point critique  $(x, y)$  vérifie donc  $x = y$  et  $y = -x^2$ , soit  $x^2 + x = 0$ . On vérifie donc facilement que les seuls points critiques sont  $(0, 0)$  et  $(-1, -1)$ . On calcule ensuite les dérivées au second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6.$$

En  $(0, 0)$ , avec les notations usuelles,  $r = 0$ ,  $t = -6$  et  $s = 6$ , soit  $rt - s^2 < 0$  :  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum local pour  $f$ . En  $(-1, -1)$ , on a  $r = -12$ ,  $t = -6$  et  $s = 6$ , soit  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$  :  $f$  admet un maximum local en  $(-1, -1)$ . Ce maximum ne peut pas être un maximum global. En effet,  $f(x, 0) = 2x^3$  tend vers  $+\infty$  si  $x$  tend vers  $+\infty$ , et donc la fonction n'est pas majorée. Par conséquent, elle n'admet pas de maximum global.

2. On calcule les dérivées partielles de  $f$  au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2 \ln y.$$

Un point critique  $(x, y)$  est solution du système

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2 \ln y = 0. \end{cases}$$

La première équation impose  $x = 0$  (puisque l'on sait que  $y > 0$ ), la deuxième équation donne  $(\ln y)^2 + 2 \ln y = 0$ . Posant  $X = \ln y$ , on obtient  $X^2 + 2X = 0$  donc les solutions sont  $X = 0$  et  $X = -2$ . Revenant à  $y$ , on trouve  $y = 1$  et  $y = e^{-2}$ .  $f$  admet donc deux points critiques qui sont  $(0, 1)$  et  $(0, e^{-2})$ . Étudions maintenant la nature de ces points critiques. Pour  $(0, 1)$ , on peut remarquer que  $f(0, 1) = 0$  alors que  $f(x, y) \geq 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Ainsi, on a prouvé que  $(0, 1)$  est un minimum global de  $f$ . Pour  $(0, e^{-2})$ , on calcule les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y} + 2 \frac{\ln y}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x.$$

Avec les notations usuelles, en  $(0, e^{-2})$ , on trouve  $rt - s^2 = -4$  et donc  $(0, e^{-2})$  n'est pas un extrémum local pour  $f$ .

3. On calcule les dérivées partielles de  $f$  au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

Un point critique  $(x, y)$  est solution du système

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x. \end{cases}$$

On en déduit  $x = x^9$  soit  $x = 0$  ou  $x^8 = 1$ . On en déduit que les points critiques sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . On calcule ensuite les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4.$$

Avec les notations usuelles, en  $(0, 0)$ , on a  $r = 0$ ,  $t = 0$  et  $s = -4$  soit  $rt - s^2 = -16$ .  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local. En  $(1, 1)$ , on a  $r = 12$ ,  $t = 12$  et  $s = -4$ , dont  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  :  $(1, 1)$  est un minimum local, et il en est de même de  $(-1, -1)$ . Pour déterminer si ce sont des minima globaux, on calcule

$$f(x, y) - f(1, 1) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 \geq 0,$$

et donc  $(1, 1)$  est un minimum global. Il en est de même de  $(-1, -1)$ . On peut aussi utiliser une autre méthode plus abstraite pour démontrer que  $f$  admet au moins un minimum global. En effet,  $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$  (car  $|xy| \leq x^2 + y^2$  par exemple). Ainsi, il existe  $M > 0$  tel que  $\|(x, y)\| \geq M \implies f(x, y) \geq 0$ . Sur la boule fermée  $K = \bar{B}(0, M)$ , qui est un compact, la fonction  $f$  est continue, donc elle admet un minimum sur  $K$  en  $(x_0, y_0) \in K$ . Ceci signifie que pour tout  $(x, y) \in K$ , on a  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Puisque  $f(1, 1) = -2$  et que  $f(x, y) \geq 0$  si  $(x, y) \notin K$ , on sait que  $f(x_0, y_0) < 0$ . Mais du fait que  $f$  est positive sur le complémentaire de  $K$ , on en déduit que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Ainsi,  $f$  admet au moins un minimum global. Maintenant, un minimum global est un minimum local, donc  $(x_0, y_0)$  doit être égal à  $(1, 1)$  ou à  $(-1, -1)$ . On conclut en remarquant que  $f(1, 1) = f(-1, -1)$ , et donc que ces deux points sont un minimum global pour  $f$ .

### Exercice 19.

Soit  $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ .

1. Représenter  $D$  et trouver une paramétrisation de  $\Gamma$ , le bord de  $D$ .
2. Justifier que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ .
3. Déterminer les points critiques de  $f$ .
4. Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $\Gamma$ .
5. En déduire le minimum et le maximum de  $f$  sur  $D$ .

### Correction.

1. Le domaine  $D$  est délimité par les deux paraboles d'équation  $y = 1 - x^2$  et  $y = x^2 - 1$ . Son bord  $\Gamma$  comporte deux parties : la partie "haute", paramétrée par  $y = 1 - x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , et la partie basse, paramétrée par  $y = x^2 - 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

**Exercice 20.**

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que  $f$  admet un maximum sur  $K$ , et déterminer ce maximum.

1.  $f(x, y) = xy(1 - x - y)$  et  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ;
2.  $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$  et  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
3.  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$  et  $K = [0, \pi/2]^2$ .

**Correction.**

1.  $K$  est un ensemble fermé et borné (c'est un triangle). C'est donc une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$ . De plus, la fonction  $f$  étant polynomiale, elle est continue sur ce compact, donc elle y est majorée et elle atteint sa borne supérieure. Le maximum peut être atteint :

- ou bien en un point du bord de  $K$  ;
- ou bien en un maximum local de  $f$  situé à l'intérieur de  $K$ .

Ici, on remarque que si  $(x, y)$  appartient à la frontière de  $K$ , alors ou bien  $x = 0$ , ou bien  $y = 0$ , ou bien  $x + y = 1$ . Dans tous les cas, on a  $f(x, y) = 0$  alors que  $f(1/4, 1/4) > 0$ . Ainsi, le maximum ne peut être atteint qu'en un point à l'intérieur de  $K$ . On cherche donc les points critiques de  $f$ . Pour cela, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x - 2y).$$

Un point critique situé à l'intérieur de  $K$  vérifie

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Le seul point critique situé à l'intérieur de  $K$  est donc  $(1/3, 1/3)$ . Comme un maximum local ne peut être atteint qu'en un point critique, c'est donc que  $f$  admet son maximum sur  $K$  en  $(1/3, 1/3)$ . Ce maximum est égal à  $1/27$ .

2. Le début du raisonnement est tout à fait similaire. Ensuite, on remarque que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2 > 0.$$

Ainsi,  $f$  ne peut pas admettre de point critique, et donc le maximum de  $f$  sur  $K$  ne peut être atteint qu'en un point du bord de  $K$ . Il suffit ensuite d'étudier le comportement de  $f$  sur le bord de  $K$ . On a d'une part  $f(x, 0) = x + x^3$  qui atteint son maximum en  $(1, 0)$ , maximum valant 2. On a ensuite  $f(x, 1) = x + x^3$ , qui atteint son maximum valant 2 en  $(1, 1)$ . On a ensuite  $f(0, y) = -y + y^3 \leq 2$  si  $y \in [0, 1]$ , et  $f(1, y) = 2 - y + y^3 \leq 2$ . Ainsi, le maximum de  $f$  sur  $K$  est égal à 2.

3. Le début du raisonnement est identique. On cherche ensuite les points critiques appartenant à l'intérieur de  $K$ , l'ouvert  $U = ]0, \pi/2[^2$  en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y \sin(2x + y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin x \sin(x + 2y)$$

(on a utilisé la célèbre formule  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ). Un point  $(x, y)$  de  $U$  est un point critique si et seulement si on a

$$\begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \sin(x + 2y) = 0. \end{cases}$$

Puisque  $x + 2y \in ]0, 3\pi/2[$ , on a nécessairement

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ x + 2y = \pi. \end{cases}$$

Ainsi, le point  $(\pi/3, \pi/3)$  est le seul point critique de  $f$  dans  $U$ . On a  $f(\pi/3, \pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ . On étudie maintenant  $f$  sur le bord de  $K$ , ie on étudie  $f(0, t)$ ,  $f(t, 0)$ ,  $f(\pi/2, t)$  et  $f(t, \pi/2)$  pour  $t \in [0, \pi/2]$ . On remarque que  $f(0, t) = f(t, 0) = 0$  et par symétrie du rôle joué par  $x$  et  $y$ , on peut se restreindre à l'étude de  $f(\pi/2, t)$ . Mais,

$$f(\pi/2, t) = \sin t \sin(t + \pi/2) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t),$$

dont le maximum pour  $t \in [0, \pi/2]$  vaut  $1/2$ . Comme  $\frac{1}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ , on en déduit que  $f$  admet pour maximum sur  $K$  la valeur  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

### Exercice 21.

Étudier les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \exp(axy)$ ,  $a > 0$  sous la contrainte  $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ .

### Correction.

Notons  $g(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4$  et  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$ . On commence par calculer les diverses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay \exp(axy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax \exp(axy), \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 1.$$

En un point  $(x, y)$  de  $G$  où  $f$  atteint un extrémum (sur  $G$ ), les différentielles sont proportionnelles. On en déduit que

$$\frac{ay \exp(axy)}{3x^2 + 1} = \frac{ax \exp(axy)}{3y^2 + 1}$$

ce qui entraîne  $3y^3 + y = 3x^3 + x$ . La fonction  $t \mapsto 3t^3 + t$  étant strictement croissante, on en déduit que l'on a nécessairement  $x = y$ . Il vient  $x^3 + x - 2 = 0$ , dont la seule racine réelle est  $x = 1$ . Il faut maintenant étudier ce qui se passe en  $(1, 1)$ . Y-a-t-il un extrémum? Est-ce un minimum? Un maximum? En fait, il suffit de remarquer qu'en les points de  $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$  pour lesquels  $|x|$  est grand, alors  $|y|$  est grand lui aussi, mais  $x$  et  $y$  sont de signe opposés. Autrement dit,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty, (x,y) \in G} f(x, y) = 0.$$

Ainsi, par compacité, la fonction admet forcément un maximum qui est atteint en  $(1, 1)$ .

### Exercice 22.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux?

- $f(x, y) = x^2 + y^3$ ;

2.  $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$ ;
3.  $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$ .

Correction.

1. On commence par chercher les points critiques de  $f$ . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2.$$

La fonction  $f$  admet donc un seul point critique qui est  $(0, 0)$ . Or,  $f(0, y) = y^3$  et cette quantité est tantôt positive, tantôt négative suivant le signe de  $y$ , même si  $y$  est très proche de 0. Ainsi,  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum, et  $f$  n'admet pas d'extrémum sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Commençons par calculer les dérivées partielles au premier ordre et au second ordre de  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - 3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 12x^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6y. \end{aligned}$$

Un point  $(x, y)$  est critique si et seulement si  $x = 0$  et  $y^2 = 1$ . Les deux points critiques de  $f$  sont donc  $A(0, 1)$  et  $B(0, -1)$ . En ces deux points, avec les notations habituelles,  $rt - s^2 = 0$ . On a donc affaire à des points dégénérés. Étudions plus précisément ce qui se passe en  $A(0, 1)$ . Pour cela, on va faire un développement limité en posant  $y = 1 + h$ ,  $h$  proche de 0. On a alors

$$f(x, 1 + h) = x^4 + (1 + h)^3 - 3(1 + h) - 2 = x^4 + h^3 + 3h^2 - 4.$$

Or, pour  $x$  et  $h$  proches de 0,  $x^4 \geq 0$  et  $3h^2 + h^3 \geq 0$  (au voisinage de 0, c'est le terme  $h^2$  qui est prédominant). Ainsi, si  $x$  et  $h$  sont proches de 0, on a

$$f(x, 1 + h) \geq -4 = f(0, 1).$$

Ainsi,  $(0, 1)$  est un minimum local pour  $f$ . L'étude en  $(0, -1)$  est similaire, mais cette fois on doit poser  $y = -1 + h$ . On a alors

$$f(x, -1 + h) = x^4 - 3h^2 + h^3.$$

Cette fois, on remarque que  $f(x, -1) = x^4 \geq 0 = f(0, -1)$  tandis que  $f(0, -1 + h) = -3h^2 + h^3 < 0$  si  $h$  est assez petit. Ainsi,  $(0, -1)$  est un point selle. Par ailleurs,  $(0, 1)$  n'est pas un minimum global. En effet, dans le cas contraire, la fonction  $f$  serait minorée. Mais  $f(0, y) = y^3 - 3y - 2$  tend vers  $-\infty$  si  $y$  tend vers  $-\infty$ , et donc la fonction  $f$  n'est pas minorée.

3. On fait le même travail pour  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + y^2 - 2xy, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -3y^2 + 2yx - x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x + 2y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2y - 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -6y + 2x. \end{aligned}$$

Si  $(x, y)$  est un point critique de  $f$ , on a nécessairement

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 0.$$

Or,

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + (x - y)^2,$$

et donc on a nécessairement  $x = 0$  et  $y = 0$  qui est effectivement un point critique. En ce point critique, on a  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut donc pas conclure directement avec les théorèmes. L'étude ici est un peu plus difficile, car les coordonnées  $x$  et  $y$  sont mélangées. On va regarder ce qui se passe sur une droite en remarquant que

$$f(2t, t) = 5t^3.$$

Ceci est négatif si  $t < 0$  et positif si  $t > 0$ , alors que  $f(0, 0) = 0$ . Ainsi,  $(0, 0)$  n'est pas un extrémum local de  $g$ , qui n'admet donc aucun extrémum local, et a fortiori aucun extrémum global.