Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°24

1. Révisions : Equations différentielles de Sup'

a. Equations différentielles linéaires scalaires du 1er ordre

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice 3.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ sur $]-1, +\infty[$ (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

Exercice 4.

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0.$$

   Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $ty' - 2y = t^3$;
2. $t^2y' - y = 0$;
3. $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 6.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(x \ln x)y' - y = -\frac{1+\ln x}{x}$ sur $]1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$;
2. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$ sur $\mathbb{R}$;

Exercice 7.

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

b. Equations différentielles linéaires scalaires du 2nd ordre à coefficients constants

Exercice 8.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 9.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$;
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$;
3. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x} + e^{3x}$;

4. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$;
5. $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$;

Exercice 10.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y"{-}3xy' + 4y = 0.\ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 11.

Pour les équations différentielles suivantes, déterminer l'unique fonction solution :
1. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.
2. $y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos(mx)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$; on discutera suivant que $m = 0$ ou $m \neq 0$.

2. Spé : systèmes différentiels

Exercice 12.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 13.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.}\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y-z \\ y' & = & 2x+4y-2z \\ z' & = & -x-2y+z \end{array}\right. \qquad \textbf{2.}\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & -x+2y+z \\ z' & = & x+z \end{array}\right.$$

Exercice 14.

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1.}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2.}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1.}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2.}\ A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Exercice 17.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.}\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 6x_1(t)+3x_2(t)-3t+4e^{3t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-x_2(t)+4t-4e^{3t} \end{array}\right. \qquad \textbf{2.}\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t)+2x_2(t)+t \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-3x_2(t). \end{array}\right.$$

On donnera les solutions réelles.

Exercice 18.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Exercice 19.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

1. A est antisymétrique ;
2. toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

3. Spé : Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 20.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 21.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 22.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y\text{''} - 3xy' + 4y = 0.\ (E)$$

1. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
2. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 23.

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24.

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x''+(t-1)x'-x=0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$x^2y''-3xy'+4y=x^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0,+\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Exercice 25.

On considère l'équation différentielle

$$xy''-y'+4x^3y=0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a,b,c,d 4 réels et $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} a\cos(x^2)+b\sin(x^2) & \text{si } x>0\\ c\cos(x^2)+d\sin(x^2) & \text{si } x<0\end{cases}$$

A quelle condition sur a,b,c,d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

Exercice 26.

Pour les équations différentielles suivantes :

1. Chercher les solutions développables en séries entières
2. Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode du wronskien
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

1. $xy''+2y'-xy=0$ **2**. $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

Exercice 27.

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on considère (E) l'équation différentielle

$$x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$, et on note S l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'objectif de l'exercice est d'étudier les valeurs possibles pour la dimension de S.

1. Rappeler la dimension de S^+ et de S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_{|I}, f_{|J})$. Donner le noyau de φ. En déduire que $\dim S \leq 4$.
3. Dans cette question, on suppose que $a(x) = x$ et que $b(x) = 0$, d'où (E) est l'équation $x^2y'' + xy' = 0$. Déterminer S^+ et S^-. En déduire ensuite S et sa dimension.
4. Dans cette question, (E) est l'équation $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. Déterminer deux solutions sur I de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^-. En déduire S et sa dimension.
5. En s'inspirant de la question précédente, donner un exemple d'équation différentielle du type $x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$.

Exercice 28.

Soit (E) l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions classiques.
2. A l'aide d'un changement de variables, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\phi : E \to E$ par

$$\begin{array}{rcl} \phi(f) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) + tf(t). \end{array}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
2. Faire de même pour ϕ^2.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0.$$