

Feuille d'exercices n°1

Exercices obligatoires : 1, 4, 5, 18, 22, 25, 28, 40, 48

1. Convexité**Exercice 1.**

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \{x + y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$).

Exercice 3.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0, 1]$. On pose $C = sC_1 + (1 - s)C_2 = \{sx + (1 - s)y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 4.

- 1) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 2) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de E l'ensemble

$$K(E) = \bigcap_{A \in \mathcal{E}(E)} A$$

où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E .

1. Démontrer que $K(E)$ est convexe.
2. Déterminer $K(E)$ lorsque E est la courbe de la fonction $y = \tan x$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I . Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A . On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\text{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\text{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A .

2. Exercices de révision : fonctions convexes

Exercice 8.

1. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que $\forall a, b > 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln b}$.

Exercice 9.

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 10.

Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 11.

Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\lambda x) \leq \text{ch}(\lambda) + x \text{sh}(\lambda).$$

Exercice 12.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 13.

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f, g)$ est toujours convexe ?

Exercice 14.

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Exercice 15.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Exercice 16.

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 17.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \quad h(x) = f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de M .
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. Déterminer le signe de g et de h sur $[a, b]$. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Exercice 18.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 20.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I . Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 21.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{1/n}.$$

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ?

Exercice 23.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t)) dt.$$

Exercice 24.

Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$x^n - 1 \geq n \left(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2} \right).$$

3. Exercices de révision : intégrale sur un segment

Exercice 25.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{x}{1+x^2} & g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} & h(x) = \frac{\ln x}{x} \\ k(x) = \cos(x) \sin^2(x) & l(x) = \frac{1}{x \ln x} & m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}. \end{array}$$

Exercice 26.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3, I = \mathbb{R} & 2. f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}, I =]-\infty, -2[\\ 3. f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}, I =]-\infty, 0[& 4. f(x) = \frac{1}{x \ln(x^2)}, I =]1, +\infty[. \end{array}$$

Exercice 27.

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, dont la dérivée est continue.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

2. En déduire que

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exercice 28.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I = \int_0^1 xe^x dx \quad 2. J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 29.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1. \quad x \mapsto \arctan(x) \quad 2. \quad x \mapsto (\ln x)^2 \quad 3. \quad x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice 30.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad 2. \quad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \quad 3. \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

Exercice 31.

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Exercice 32.

Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt.$$

Exercice 33.

Pour (n, p) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Exercice 34.

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n . Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (f^{(n-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a) g^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x) = (1 - x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n , puis prouver que $\int_{-1}^1 Q P_n = 0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Exercice 35.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$1. \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \quad 2. \int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

Exercice 36.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$1. \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad 2. \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(3 + e^t)\sqrt{e^t - 1}} dt, \quad x > 0$$

Exercice 37.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 38.

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$1. \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad 2. \quad x \mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Exercice 39.

On demande de calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}.$$

Sur une copie d'un étudiant, on lit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}} \\ &= \int_0^\pi \frac{(1 + \tan^2 x) dx}{2 + \tan^2 x}. \end{aligned}$$

Je pose $t = \tan x$, d'où $dt = (1 + \tan^2 x) dx$, et j'obtiens

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{1}{2 + t^2} dt = 0.$$

Exercice 40.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Exercice 41.

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 42.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ 2. $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $] -1, +\infty[$
 3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$ 4. $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $] -1/2, 1/3[$

Exercice 43.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ 2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$
 3. $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 44.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+x+1}$ 2. $x \mapsto \frac{2x}{x^2-x+1}$
 3. $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x-3}$

Exercice 45.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-4}{|x+2|+1}$. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

Exercice 46.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{1}{x^3-1} \\ 2. & x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} \\ 3. & x \mapsto \frac{1}{x^3-7x+6} \\ 4. & x \mapsto \frac{4x^2}{x^4-1} \end{array}$$

Exercice 47.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3 .

Exercice 48.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & \int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx \\ 2. & \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx \\ 3. & \int_0^\pi x^2 e^x \cos x dx \end{array}$$

Exercice 49.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{1}{\cosh x} \\ 2. & x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \\ 3. & x \mapsto \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x \\ 4. & x \mapsto \frac{1}{\cosh x(1 + \sinh x)} \end{array}$$

Exercice 50.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \sin^5 x \quad 2. x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x \quad 3. x \mapsto \cos(3x) \cos^3 x.$$

Exercice 51.

1. Démontrer par récurrence que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(mx) dx = 0$$

- on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

2. En déduire que

$$\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(nx) dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Exercice 52.

Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{\cos^6 x}$ sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 53.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2 t} dt \quad 2. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \quad 3. \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(x)) \tan(x) dx.$$

Exercice 54.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x} dx \quad 2. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

Exercice 55.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^\pi \frac{1 - \cos(x/3)}{\sin(x/2)} dx \quad 2. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}.$$

Exercice 56.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \\ 2. & x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ 3. & x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \end{array}$$

Exercice 57.

On se propose de calculer $I = \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I .

Exercice 58.

Calculer $\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5} dx$.

Exercice 59.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4} \\ 2. & x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \\ 3. & x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \\ 4. & x \mapsto e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1) \\ 6. & x \mapsto \sin^5(x) \\ 6. & x \mapsto \arctan(x) \end{array}$$