

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Exercices obligatoires : 1, 4, 5, 18, 22, 25, 28, 40, 48

1. Convexité**Exercice 1.**

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \{x + y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Correction.

Soit $z_1, z_2 \in C_1 + C_2$ et $t \in]0, 1[$. Alors $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$. On a alors $(1 - t)z_1 + tz_2 = x + y$ avec $x = (1 - t)x_1 + tx_2 \in C_1$ et $y = (1 - t)y_1 + ty_2 \in C_2$ par convexité respective de C_1 et C_2 . Ainsi, $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$).

Correction.

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tous réels α et β et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$,

$$((1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta)^2 \leq (1 - \lambda)\alpha^2 + \lambda\beta^2.$$

Soient $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \frac{((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)^2}{a^2} + \frac{((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)^2}{b^2} &\leq \frac{(1 - \lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2}{a^2} + \frac{(1 - \lambda)y_1^2 + \lambda y_2^2}{b^2} \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) + \lambda \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right) \\ &\leq (1 - \lambda) + \lambda \quad (\text{car } 1 - \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a montré que pour tous $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \in \mathcal{E}$. Donc, $\mathcal{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0, 1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Correction.

Soit $z_1, z_2 \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$ tels que

$$z_1 = sx_1 + (1-s)y_1, \quad z_2 = sx_2 + (1-s)y_2.$$

Mais alors

$$tz_1 + (1-t)z_2 = s(tx_1 + (1-t)x_2) + (1-s)(ty_1 + (1-t)y_2).$$

Par convexité respective de C_1 et C_2 , $tx_1 + (1-t)x_2 \in C_1$ tandis que $ty_1 + (1-t)y_2 \in C_2$. On en déduit que C est bien une partie convexe de E .

Exercice 4.

- 1) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 2) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

1) Les matrices I_n et $-I_n$ sont deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$. Mais $\frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}(-I_n) = 0_n$ n'est pas un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices stochastiques et soit $\lambda \in [0, 1]$.

Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ est $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.

- Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $a_{i,j} \geq 0, b_{i,j} \geq 0$ et on a aussi $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$. Donc, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geq 0$.

- Puisque pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $a_{i,j} \geq 0$ et $b_{i,j} \geq 0$ et que $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, on en déduit que pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $(1-\lambda)a_{i,j} \leq 1-\lambda$ et $\lambda b_{i,j} \leq \lambda$ puis $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \leq 1-\lambda + \lambda = 1$.

- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda) \sum_{j=1}^n a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n b_{i,j} = 1-\lambda + \lambda = 1.$$

On a montré que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de E l'ensemble

$$K(E) = \bigcap_{A \in \mathcal{E}(E)} A$$

où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E .

1. Démontrer que $K(E)$ est convexe.
2. Déterminer $K(E)$ lorsque E est la courbe de la fonction $y = \tan x$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Correction.

1. Soit $x, y \in K(E)$ et $t \in]0, 1[$. Soit A un convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant E . Alors $x \in A$ et $y \in A$. Par convexité de A , on en déduit que $tx + (1-t)y \in A$. Comme ceci est vrai pour tous les convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E , on a bien $tx + (1-t)y \in K(E)$, et ce dernier ensemble est convexe. Plus précisément, l'enveloppe convexe de E est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant E .
2. On va prouver que l'enveloppe convexe de E est l'ensemble $F =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$. En effet, F est convexe et contient E . Réciproquement, prenons un point $M = (x_0, y_0)$ de F . Si $y_0 = \tan(x_0)$ alors $M \in E \subset K(E)$. Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $\tan(x_0) < y_0$. Considérons $x_1 < x_0$ tel que $x_1 > -\pi/2$ et considérons A le point de E de coordonnées $(x_1, \tan(x_1))$. La droite (AM) a pour équation $y - \tan(x_1) = m(x - x_1)$ où m est le coefficient directeur de la droite (on peut bien sûr le calculer, mais sa valeur n'a pas d'importance). Considérons alors la fonction définie sur $[x_1, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - m(x - x_1) - \tan(x_1)$. Alors, puisque M est sur la droite (AM) , on a $y_0 = m(x_0 - x_1) + \tan(x_1)$ et donc $f(x_0) = \tan(x_0) - y_0 < 0$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue, il existe $x_2 \in]x_0, \pi/2[$ tel que $f(x_2) = 0$. Autrement dit, le point $B = (x_2, \tan(x_2))$ est à la fois sur E et sur la droite (AM) . On a donc M qui appartient au segment $[AB]$ avec A et B des points de E . Ceci implique que $M \in K(E)$.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I . Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Correction.

Soit $x_0 \in I$. On va démontrer que f est continue à droite en x_0 . La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a < x_0$ et $b > x_0$ tels que $a, b \in I$. Alors, d'après l'inégalité des pentes, pour tout $x \in]x_0, b]$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

ce qui donne

$$(x - x_0) \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0) \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Le résultat devient faux si $I = [0, 1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A . On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\text{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\text{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A .

Correction.

1. Soit A_1, A_2 deux parties convexes de E . Soit $u, v \in A_1 \cap A_2$. Alors, par convexité, $[u, v] \subset A_1$ et $[u, v] \subset A_2$; donc $[u, v] \subset A_1 \cap A_2$. Par suite $A_1 \cap A_2$ est convexe.

Il en est de même dans le cas général : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de convexe où I est un ensemble d'indice quelconque. Soit $u, v \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Alors, par convexité, pour tout $i \in I$,

$$[u, v] \subset A_i. \text{ Donc } [u, v] \subset \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Concernant la réunion de deux convexes, le résultat n'est pas convexe en général : prendre deux singletons distincts par exemple dans un espace vectoriel de dimension au moins 1.

2. Soit C l'intersection de tous les convexes contenant A . Alors C est convexe d'après la question précédente et il contient A . Or si C' est un convexe contenant A , alors par définition, on a $C \subset C'$. Donc C est le plus petit convexe contenant a pour l'inclusion.
3. Soit Γ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A .

— Alors A est inclus dans Γ (il suffit de voir chaque point a de A comme le barycentre de $(a, 1)$ par exemple). Montrons que de plus Γ est convexe.

Soit $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $g' = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ appartenant à Γ (on a supposé, quitte à diviser par les sommes de pondérations respectives, que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^m \mu_i$).

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $tg + (1 - t)g' = \sum_{i=1}^n t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^m (1 - t)\mu_i y_i$ est le barycentre à coefficients positifs de la famille de points de A pondérés $((x_1, t\lambda_1), \dots, (x_n, t\lambda_n), (y_1, (1 - t)\mu_1), \dots, (y_m, (1 - t)\mu_m))$ (il faut aussi remarquer que $t1 + (1 - t)1 = 1$), donc, par définition, c'est un élément de Γ . Par suite, Γ est convexe.

Il en résulte que $\text{Conv}(A) \subset \Gamma$.

— On a $A \subset \text{Conv}(A)$ donc tout élément Γ est en particulier un barycentre de points de $\text{Conv}(A)$. Or $\text{Conv}(A)$ est convexe, donc d'après la caractérisation des convexes par les barycentres, tout barycentre à coefficients positifs de points de $\text{Conv}(A)$ est dans $\text{Conv}(A)$. Il en résulte que $\Gamma \subset \text{Conv}(A)$.

On en conclut que $\text{Conv}(A) = \Gamma$.

2. Exercices de révision : fonctions convexes

Exercice 8.

1. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que $\forall a, b > 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln b}$.

Correction.

1. On calcule la dérivée seconde de f qui vaut :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 \ln^2(x)}.$$

Cette fonction est négative sur $]1, +\infty[$. Donc la fonction est concave.

2. Par concavité de f , on a :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}(\ln \ln a + \ln \ln b) = \ln\left(\sqrt{\ln a \ln b}\right).$$

On compose par la fonction exponentielle qui est croissante pour obtenir le résultat.

Exercice 9.

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Correction.

Puis $(\sin)'' = -\sin$, la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$. Sa courbe représentative est donc, sur cet intervalle, en-dessous de sa tangente en 0, et au-dessus de la corde joignant $(0, \sin 0)$ à $(\pi/2, \sin(\pi/2))$. Or, l'équation de cette tangente est $y = x$, et l'équation de cette corde est $y = \frac{2}{\pi}x$. On obtient exactement le résultat demandé.

Exercice 10.

Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction.

1. f est deux fois dérivable sur $[-1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \geq -1$, on a

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \text{ et } f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0.$$

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq -1$. On en déduit que f est convexe sur $[-1, +\infty[$.

2. Puisque $f'(0) = n$, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$ est $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ soit $y = 1 + nx$. La fonction étant convexe, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. Donc, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 11.

Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\lambda x) \leq \text{ch}(\lambda) + x \text{sh}(\lambda).$$

Correction.

Nous allons appliquer la définition de la convexité à la fonction $\exp$, avec des points et des coefficients bien choisis. Pour comprendre d'où viennent ces points et ces coefficients, remarquons que l'inégalité que l'on cherche à prouver est équivalente à

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} + x \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

qui est encore équivalente à

$$\exp(\lambda x) \leq \left(\frac{1+x}{2}\right) e^\lambda + \left(\frac{1-x}{2}\right) e^{-\lambda}.$$

On pose alors $t = \frac{1+x}{2} \in [0, 1]$ de sorte que $1-t = \frac{1-x}{2}$ et on applique la définition de la convexité de la fonction exponentielle avec les points λ et $-\lambda$, et avec t . On obtient directement l'inégalité demandée, sous la forme équivalente obtenue ci-dessus.

Exercice 12.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors on a par convexité de f :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Par croissance de g , on en déduit que

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)).$$

La convexité de g permet de conclure à

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda)g \circ f(y)$$

ce qui signifie bien que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 13.

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f, g)$ est toujours convexe ?

Correction.

Il faut commencer par faire des dessins pour deviner la réponse !

1. Oui ! En effet, soit $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$ et posons $h = \max(f, g)$. On a d'une part

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

et d'autre part

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \leq th(x) + (1-t)h(y).$$

On en déduit bien que

$$h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y),$$

c'est-à-dire que h est convexe.

2. Non ! Choisissons par exemple $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, qui sont convexes car affines. Alors $\min(f, g)(x) = -|x|$, et cette fonction n'est bien sûr pas convexe (par exemple, la courbe représentative est au-dessus de la corde reliant $(-1, -1)$ à $(1, -1)$).

Exercice 14.

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Correction.

1. Notons f cette fonction. La fonction f est clairement de classe C^∞ et sa dérivée seconde vérifie

$$f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^3}.$$

La fonction exponentielle étant croissante, f'' est du signe de $2x - x = x$. Ainsi, $f'' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $f'' \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$. Ainsi, f est concave sur $] -\infty, 0]$ et convexe sur $]0, +\infty[$.

2. Posons, pour $i = 1, \dots, n$, $y_i = \ln(x_i) \geq 0$. Appliquons l'inégalité de Jensen à f , aux y_i , avec pour coefficients $1/n$. On obtient

$$f\left(\frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(x_k)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}.$$

On conclut en remarquant que

$$\frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n} = \ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}).$$

Exercice 15.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Correction.

Par concavité du logarithme :

$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n}.$$

Or,

$$\frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} = \ln(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}).$$

On conclut en utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante.

Exercice 16.

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Correction.

La corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Pour les points d'abscisse comprise entre a et b , la courbe représentative de f est au-dessous de cette corde, c'est-à-dire que

$$f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

pour $t \in [a, b]$. On intègre cette inégalité entre a et b et on trouve

$$\int_a^b f(t)dt \leq (f(b) - f(a))\frac{(b-a)}{2} + f(a)(b-a) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Cette inégalité a aussi une interprétation (et une preuve!) géométrique simple si f est plus positive. Notons A, B, C et D les points $A(a, 0), B(a, f(a)), C(b, f(b)), D(b, 0)$. Alors

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

est égal à l'aire du trapèze $ABCD$. Comme la fonction f est convexe, et donc que la courbe représentative de f est sous le segment $[AB]$, l'aire de ce trapèze est supérieure ou égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f , et les droites $x = a, x = b$. L'aire de ce domaine est exactement $\int_a^b f(x)dx$. Pour prouver l'autre inégalité, il suffit de remarquer que la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $(a + b)/2$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) \geq f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(t - \frac{a+b}{2} \right) + f \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Intégrer cette inégalité entre a et b donne exactement

$$\int_a^b f(t)dt \geq (b-a)f \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Exercice 17.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \quad h(x) = f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de M .
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. Déterminer le signe de g et de h sur $[a, b]$. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Correction.

1. f'' est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
2. On calcule les dérivées secondes qui sont $g''(x) = f''(x) + M \geq 0$ et $h''(x) = f''(x) - M \leq 0$. Ceci prouve bien que g est convexe et que h est concave.
3. Par convexité de g , et puisque $g(a) = g(b) = 0$, on sait que la courbe représentative de g est sous la corde reliant $(a, g(a))$ à $(b, g(b))$ et donc

$$g(x) \leq 0 \implies f(x) \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

De même, la courbe représentative de h est au-dessus de ses cordes, et donc

$$h(x) \geq 0 \implies f(x) \geq -M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Les deux inégalités réunies donnent exactement l'inégalité demandée.

Exercice 18.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

Correction.

Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ et $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Soit aussi $t \in [0, 1]$. Alors

$$f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2) = f^{-1}(tf(x_1) + (1-t)f(x_2)).$$

Par convexité de f ,

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Puisque f^{-1} est croissante (la réciproque d'une fonction croissante est croissante), on en déduit que

$$f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2) \geq f^{-1}(f(tx_1 + (1-t)x_2)) = tx_1 + (1-t)x_2 = tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2).$$

Ainsi, f^{-1} est concave.

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Correction.

Supposons f non constante. On peut trouver $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$. Soit $y = ax + b$ l'équation de la corde passant par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, avec donc $a > 0$. Pour $x > x_2$, l'inégalité des pentes assure que le point de la courbe représentative de f d'abscisse x est au-dessus du point de la corde de même abscisse. Autrement dit, pour tout $x \geq x_2$, on a $f(x) \geq ax + b$. Ceci prouve que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 20.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I . Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Correction.

Soit $x_0 \in I$. On va démontrer que f est continue à droite en x_0 . La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a < x_0$ et $b > x_0$ tels que $a, b \in I$. Alors, d'après l'inégalité des

pentés, pour tout $x \in]x_0, b]$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

ce qui donne

$$(x - x_0) \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0) \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Le résultat devient faux si $I = [0, 1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 21.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{1/n}.$$

Correction.

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est une fonction positive.
2. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. La convexité de f entraîne que

$$\ln \left(1 + e^{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} \right) \leq \frac{\ln(1 + e^{a_1}) + \dots + \ln(1 + e^{a_n})}{n}$$

ce qui par les propriétés fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle donne

$$\ln \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n e^{a_k} \right)^{1/n} \right) \leq \ln \left(\left(\prod_{k=1}^n (1 + e^{a_k}) \right)^{1/n} \right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n e^{a_k} \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + e^{a_k}) \right)^{1/n}.$$

C'est exactement le résultat voulu, pourvu que l'on choisisse $a_k = \ln x_k$.

3. En factorisant, on trouve

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right).$$

On applique l'inégalité de la fonction précédente à $x_k = b_k/a_k$, et on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

Il suffit de tout mettre au dénominateur dans le dernier terme pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ?

Correction.

1. Supposons que f n'est pas décroissante. Alors il existe $a < b$ tel que $f(b) > f(a)$. La droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

et on sait que pour les points d'abscisse supérieure ou égale à b , la courbe représentative de f est au-dessus de cette droite. On a donc, pour $x \geq b$,

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Par théorème de comparaison, ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, une contradiction.

2. Puisque f est décroissante, $f' \leq 0$. Puisque f est convexe, f' est croissante. Elle admet donc une limite $\ell \leq 0$ en $+\infty$. Si $\ell < 0$, et puisque f' est croissante, on sait que $f'(x) \leq \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, avec l'inégalité des accroissements finis,

$$f(x) - f(0) \leq \ell \times x.$$

Le théorème de comparaison nous dit cette fois que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est aussi une contradiction.

3. Non ! Prenons par exemple $f(x) = \frac{1}{x} \sin(x^2)$. Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin(x^2) + 2 \cos(x^2)$$

et cette fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$, puisque $f'(\sqrt{2n\pi}) = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t)) dt.$$

Correction.

On va approcher f par sa somme de Riemann. Précisément, introduisons

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Alors, puisque f est continue, par le théorème des sommes de Riemann, on sait que (u_n) converge vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$. De plus, par convexité de g , on a

$$g(u_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Par continuité de $g \circ f$, le terme de droite converge vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t)) dt$. Passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient bien l'inégalité dite de Jensen.

Exercice 24.

Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$x^n - 1 \geq n \left(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2} \right).$$

Correction.

Si on simplifie par $x - 1 > 0$, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$1 + x + \dots + x^{n-1} \geq nx^{(n-1)/2}.$$

Pour démontrer cette inégalité, on pose, ($x > 1$ est fixé) $f(y) = \exp(y \ln x)$. f est une fonction convexe. En particulier, on a

$$\frac{1}{n} (f(0) + \dots + f(n-1)) \geq f\left(\frac{1}{n} (0 + 1 + \dots + (n-1))\right).$$

Mais le membre de gauche est $\frac{1}{n} (1 + x + \dots + x^{n-1})$ tandis que celui de droite est

$$f\left(\frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) = f((n-1)/2) = x^{(n-1)/2}.$$

On obtient donc bien l'inégalité voulue.

3. Exercices de révision : intégrale sur un segment

Exercice 25.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{x}{1+x^2} & g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} & h(x) = \frac{\ln x}{x} \\ k(x) = \cos(x) \sin^2(x) & l(x) = \frac{1}{x \ln x} & m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}. \end{array}$$

Correction.

1. On reconnaît que $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+x^2 > 0$. Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
2. On reconnaît que $g(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{3x} > 0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3} \ln(1+e^{3x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
3. On reconnaît que $h(x) = u'(x) \times u(x)$, avec $u(x) = \ln x$. Les primitives de h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Remarquons que de telles fonctions ne sont définies que sur $]0, +\infty[$.
4. On reconnaît que $k(x) = \frac{1}{3} u'(x) (u(x))^2$, avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3} (\sin x)^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.
5. En écrivant $l(x) = \frac{1}{x \ln x}$, on reconnaît que $l(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$. Les primitives de cette fonction, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(\ln x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
6. On reconnaît que $m(x) = \frac{3}{2} u'(x) \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1+x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1+x^2)^{3/2}$.

Exercice 26.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$, $I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}$, $I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x^2)}$, $I =]1, +\infty[$.

Correction.

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$, de sorte que $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x) u(x)^3.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{8} (3x^2 - 2x + 3)^4.$$

2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 1$ de sorte que $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1 - x^2)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{-1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3 - 3x + 1)^2}.$$

3. Posons $u(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$. On a $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

4. Il faut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2 \ln x$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)},$$

avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(\ln x).$$

Exercice 27.

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, dont la dérivée est continue.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

2. En déduire que

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Correction.

1. La formule de dérivation d'un produit nous dit que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

C'est le résultat demandé, en changeant de côté le terme $u'(x)v(x)$.

2. On intègre la relation précédente. Par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat demandé,

en particulier puisque

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Exercice 28.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_0^1 x e^x dx \quad 2. \quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Correction.

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_0^1 x e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx.$$

Comme on sait calculer cette dernière intégrale, on trouve finalement

$$\int_0^1 x e^x dx = e - e + 1 = 1.$$

2. On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 & v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 29.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1. \quad x \mapsto \arctan(x) \quad 2. \quad x \mapsto (\ln x)^2 \quad 3. \quad x \mapsto \sin(\ln x).$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= \arctan x & u'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \int \frac{t}{t^2+1} dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g , et donc

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= (\ln x)^2 & u'(x) &= 2 \frac{\ln x}{x} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x \ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0, +\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= \sin(\ln x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{ll} u_1(x) &= \cos(\ln x) & u_1'(x) &= -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ v_1'(x) &= 1 & v_1(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)).$$

Exercice 30.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad 2. \quad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \quad 3. \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

Correction.

1. On commence par intégrer par parties pour obtenir

$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant une intégration par parties. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Ainsi il vient

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$

Finalement, on trouve

$$I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2).$$

2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2}[(x^2+1)(\arctan x)^2]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{16} - [x \arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0, 1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0, 1]$ en posant $f(0) = 0$, ce qui donne un sens à K . Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a > 0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $K(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x) & v'(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x) &= \frac{1}{x} & v(x) &= -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$K(a) = \left[-\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} \right]_a^1 + \frac{1}{2} \int_a^1 \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

de sorte que

$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_a^1 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(1 + a^2).$$

On obtient donc que

$$K(a) = \frac{\ln a}{2(a^2 + 1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4} \ln(1 + a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$K(a) = \frac{-a^2 \ln(a)}{2(a^2 + 1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4} \ln(1 + a^2).$$

Comme $a^2 \ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1 + a^2)$, on conclut finalement que

$$K = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 31.

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Correction.

Notons f_n une telle primitive. Intégrant par parties (en dérivant $\ln^n x$ et en intégrant 1), on trouve

$$f_n = \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n f_{n-1}.$$

On itère alors les intégrations par parties, pour trouver

$$\begin{aligned} f_n &= x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x + n(n-1) f_{n-2} \\ &= x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x + n(n-1) x \ln^{n-2} x - n(n-1)(n-2) f_{n-3} \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) x \ln^{n-k} x \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x \ln^{n-k} x. \end{aligned}$$

Exercice 32.

Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt.$$

Correction.

On pose, pour $(\alpha, \beta, n, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$,

$$I_{m,n} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^m (t - \beta)^n dt.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(t - \alpha)^m \frac{(t - \beta)^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{m}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^{m-1} (t - \beta)^{n+1} dt \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \beta)^p dt = -\frac{(\alpha - \beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \frac{m(m-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \frac{(\alpha - \beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1) \dots (2n)} \frac{(\alpha - \beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(\alpha - \beta)^{2n+1}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}.$$

Exercice 33.

Pour (n, p) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Correction.

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n (\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0, 1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n > 0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous

allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a > 0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p > 0$. On pose donc

$$I_{n,p}(a) = \int_a^1 x^n (\ln x)^p dx$$

puis

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x)^p & v'(x) &= x^n \\ u'(x) &= \frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & v(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1} [x^{n+1} (\ln x)^p]_a^1 - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = \frac{-a^{n+1}}{n+1} - \frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0, et on trouve :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p) \times (-(p-1)) \times \cdots \times (-1)}{(n+1) \times (n+1) \times \cdots \times (n+1)} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Exercice 34.

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n . Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (f^{(n-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a) g^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x) = (1-x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n , puis prouver que $\int_{-1}^1 Q P_n = 0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Correction.

1. Procédons par récurrence sur n . La formule est vraie pour $n = 1$ (c'est la formule d'intégration par parties classique). Supposons la vraie au rang $n-1$ et prouvons-la au rang n . Soit $h = f'$, qui est de classe C^{n-1} . La formule au rang $n-1$ appliquée à h et g donne

$$\int_a^b h^{(n-1)} g = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (h^{(n-1-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - h^{(n-1-k-1)}(a) g^{(k)}(a)) + (-1)^{n-1} \int_a^b h g^{(n-1)}$$

soit

$$\int_a^b f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (f^{(n-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a) g^{(k)}(a)) + (-1)^{n-1} \int_a^b f' g^{(n-1)}.$$

Il suffit alors d'intégrer par parties le dernier terme,

$$\int_a^b f' g^{(n-1)} = f(b)g^{(n-1)}(b) - f(a)g^{(n-1)}(a) - \int_a^b f g^{(n)}$$

pour obtenir le résultat.

2. Q_n est un polynôme de degré $2n$, donc P_n , sa dérivée n -ième, est un polynôme de degré n . De plus, 1 et -1 sont racines n -ièmes de Q_n , et donc pour tout $k \leq n-1$, on a $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$. Pour Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n Q &= \int_{-1}^1 Q_n^{(n)} Q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (Q_n^{(n-k-1)}(1) Q^{(k)}(1) - Q_n^{(n-k-1)}(-1) Q^{(k)}(-1)) + (-1)^n \int_{-1}^1 Q_n Q^{(n)}. \end{aligned}$$

Mais $Q^{(n)} \equiv 0$ car Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et pour $k \leq n-1$, $n-k-1 \leq n-1$ et donc $Q_n^{(n-k-1)}(1) = Q_n^{(n-k-1)}(-1) = 0$. On en déduit bien que l'intégrale recherchée est nulle.

Exercice 35.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$1. \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \quad 2. \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1, 4]$ sur $[1, 2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2u du.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t} dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u} 2u du \\ &= \int_1^2 (2-2u) du \\ &= [2u - u^2]_1^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[e, e^2]$. Effectuons le changement de

variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = [\ln|1+u|]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

Exercice 36.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$1. \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad 2. \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt, \quad x > 0$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1, e]$ sur $[0, 1]$. On pose donc $u = \ln x$ de sorte que $du = \frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e , u vaut 1. On trouve donc

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx &= \int_0^1 u^n du \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t-1}$ est une bijection de $[1, x]$ sur $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^x-1}]$. Posant $u = \sqrt{e^t-1}$, on a

$$du = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}} dt$$

et

$$3 + e^t = u^2 + 4$$

d'où

$$F(x) = 2 \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{du}{u^2+4} = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$

Exercice 37.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Correction.

La fonction $x \mapsto (a + b - x)$ est une bijection continue strictement décroissante de $[a, b]$ sur lui-même, envoyant a en b et b en a . Effectuant le changement de variables $u = a + b - x$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a + b - u)f(a + b - u)du \\ &= \int_a^b (a + b - u)f(u)du \\ &= (a + b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx.\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat demandé. Pour l'application, posons $a = 0$, $b = \pi$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variables $u = \cos x$. En effet, la fonction $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. De $du = -\sin x dx$, on déduit

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-du}{1 + u^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{\pi}{2} (\arctan(1) - \arctan(-1)) \\ &= \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 38.

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$1. \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x} \qquad 2. \quad x \mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on fait le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que

$du = \frac{dx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2u du$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int u \cos(u) du \\ &= 2[u \sin u] - 2 \int \sin(u) du \\ &= 2u \sin u + 2 \cos u + C \\ &= 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties).

Exercice 39.

On demande de calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}.$$

Sur une copie d'un étudiant, on lit

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}} \\ &= \int_0^\pi \frac{(1 + \tan^2 x) dx}{2 + \tan^2 x}.\end{aligned}$$

Je pose $t = \tan x$, d'où $dt = (1 + \tan^2 x) dx$, et j'obtiens

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{1}{2 + t^2} dt = 0.$$

Correction.

1. On intègre une fonction continue strictement positive : l'intégrale ne peut pas être nulle !
2. Le problème est que la fonction $\tan$ ne réalise pas du tout une bijection entre l'intervalle $[0, \pi]$ et l'intervalle $[\tan(0), \tan(\pi)]$: elle n'est pas définie en $\pi/2$, et on doit couper l'intervalle en deux !

3. On écrit

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2(x)} \text{ et } I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}.$$

La fonction $\tan$ réalise une bijection entre $[0, \pi/2[$ et $[0, +\infty[$, et on a donc

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2 + x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

De même, $\tan$ réalise une bijection entre $] \pi/2, 0]$ et $] -\infty, 0]$, et on a

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2 + x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement,

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Bien sûr, il aurait aussi fallu justifier l'existence de I !

Exercice 40.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Correction.

1. On met tout au même dénominateur :

$$a + \frac{b}{x+1} = \frac{ax + (a+b)}{x+1}.$$

Le choix de $a = 1$ et $b = -1$ fonctionne.

2. On écrit

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx &= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= [x - \ln(x+1)]_1^2 \\ &= 2 - \ln(3) - 1 + \ln(2) \\ &= 1 + \ln(2/3). \end{aligned}$$

Exercice 41.

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Correction.

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}. \end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\begin{cases} a+b &= 5 \\ 6a+2b+c &= 21 \\ 9a-3b-c &= 22 \end{cases}$$

On résout ce système en commençant par remarquer que $a = 5 - b$. Il est donc successivement équivalent à

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a &= 5-b \\ -4b+c &= -9 \\ -12b-c &= -23 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a &= 5-b \\ c &= -9+4b \\ -16b &= -32 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve finalement comme unique solution $a = 3$, $b = 2$ et $c = -1$, de sorte que

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation

$$3\ln(1) + 2\ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0.$$

La primitive de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln 5 - \frac{1}{5}.$$

Exercice 42.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$
2. $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $] -1, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$
4. $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $] -1/2, 1/3[$

Correction.

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-2a+b) + (a-b+c)}{(x-1)^2}.$$

Par identification, on trouve $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + d,$$

où d est une constante.

2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a = 2$ et $b = -3$. Une primitive sur $] -1, +\infty[$ de la fonction est donc

$$x \mapsto 2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1}.$$

3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = (x^2 - 4)$. Une primitive est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système

$$\begin{cases} a &= 2 \\ 8a + 4b + 6c &= 18 \\ -a + 4b + c + 3d &= 10 \\ -a + b - c - d &= -9. \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme solution $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{3} \ln |3x-1| + \frac{1}{2} \ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

Exercice 43.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4}$
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$
3. $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$

Correction.

1. On remarque simplement que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4}$ est donc $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$. La méthode précédente donne

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x + 2).$$

3. Le dénominateur se factorise en $(1 - x)(1 + x)$. On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}.$$

En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve

$$a = -1/2, \quad b = 1/2.$$

Une primitive de $\frac{1}{1 - x^2}$ est donc $\frac{1}{2} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln|x - 1|$.

Exercice 44.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1}$
2. $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - x + 1}$
3. $x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3}$

Correction.

1. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

On intègre alors. Pour la première partie, c'est facile, car :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \ln|x^2 + x + 1|.$$

Pour la seconde, on se ramène à écrire le dénominateur sous la forme $X^2 + \omega^2$, ce qui nécessite en plus un changement de variables. Ici, on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ soit, avec

le changement de variables $u = x + 1/2$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement, une primitive de la fonction recherchée est

$$x \mapsto \frac{3}{2} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On procède exactement comme à la question précédente :

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc

$$x \mapsto \ln|x^2 - x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Ici, il n'y a rien à faire car le numérateur est déjà la dérivée du dénominateur ! Une primitive de la fonction recherchée est donc tout simplement

$$x \mapsto \ln|x^2 + x - 3|.$$

Exercice 45.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-4}{|x+2|+1}$. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

Correction.

Remarquons d'abord que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Le cours nous dit qu'il existe une unique primitive de F , définie sur $\mathbb{R}$, telle que $F(0) = 0$. Le problème est de trouver sa forme explicite, car f est définie de façon explicite "par morceaux". Pour $x \geq -2$, on a

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3} = x - 3 + \frac{5}{x + 3}.$$

Ainsi, si F est la primitive recherchée, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \geq -2$,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 5 \ln(x + 3) + C.$$

De même, si $x < -2$, on a

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4}{x + 1} = -x + 1 + \frac{3}{x + 1}.$$

Ainsi, il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < -2$,

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x + 1| + D.$$

On sait aussi que F doit être continu en -2 . Ainsi, les limites à gauche et à droite doivent coïncider. On trouve donc que

$$C + 8 = D - 4.$$

Enfin, la condition $F(0) = 0$ se traduit par $C = -5 \log 3$. Donc finalement la fonction F est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 3x + 5 \ln(x+3) - 5 \log 3 & \text{si } x \geq -2 \\ -\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x+1| + 12 - 5 \log 3 & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

Exercice 46.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1} \\ 2. & x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} \\ 3. & x \mapsto \frac{1}{x^3 - 7x + 6} \\ 4. & x \mapsto \frac{4x^2}{x^4 - 1} \end{array}$$

Correction.

1. Le dénominateur se factorise en $(x-1)(x^2+x+1)$. On cherche alors à écrire

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}.$$

Par identification (par exemple...) on trouve $a = 1/3$, $b = -1/3$ et $c = -2/3$, soit

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \times \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

On cherche alors à faire apparaître la dérivée de $x^2 + x + 1$ pour faciliter l'intégration, et on trouve

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{6} \times \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Pour intégrer le dernier terme, on écrit

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

ce qui donne finalement qu'une primitive de la fonction est

$$x \mapsto \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve que

$$x^3 + 2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x+1$$

d'où

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Une primitive est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln |x^2 + x + 1|.$$

3. On a la factorisation suivante :

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

On sait qu'on peut écrire

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{a}{x + 3} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2}$$

et on trouve

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{20(x + 3)} - \frac{1}{4(x - 1)} + \frac{1}{5(x - 2)}.$$

Une primitive est donc

$$x \mapsto \frac{1}{20} \ln |x + 3| - \frac{1}{4} \ln |x - 1| + \frac{1}{5} \ln |x - 2|.$$

4. Le dénominateur se factorise en

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

La décomposition attendue a la forme

$$\frac{4x^2}{x^4 - 1} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x - 1} + \frac{d}{x + 1}.$$

On trouve facilement (multipliant par $x - 1$ et faisant $x = 1$, puis multipliant par $x + 1$ et faisant $x = -1$) que $c = 1$ et $d = -1$. On en déduit qu'on doit avoir $a = 0$ et finalement $b = 2$. On en déduit donc

$$\frac{4x^2}{x^4 - 1} = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}.$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc

$$x \mapsto 2 \arctan x + \ln |x - 1| - \ln |x + 1|.$$

Exercice 47.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3 .

Correction.

Une intégration par parties donne, en posant $u(x) = (x^2 + 1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$,

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}.$$

Regroupant les termes, on trouve

$$2nI_{n+1} = (2n - 1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n - 1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

Sachant que $I_1 = \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \text{ et } I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

Exercice 48.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)dx & 2. \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx \\ 3. \int_0^\pi x^2 e^x \cos x dx & \end{array}$$

Correction.

1. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x(ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d)).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x \mapsto e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$ lorsque $a = 2$, $3a + b = 3$, $2b + c = 5$ et $c + d = 1$, soit $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et $d = -4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C.$$

L'intégrale recherchée vaut donc

$$F(1) - F(0) = 4.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve que l'intégrale vaut

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx.$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx &= \Re e \left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x} dx \right) \\ &= \Re e \left(\left[\frac{1}{2i-1} e^{(2i-1)x} \right]_0^{2\pi} \right) \\ &= \Re e \left(\frac{1}{5} (2i+1)(1 - e^{-2\pi}) \right) \\ &= \frac{1}{5} (1 - e^{-2\pi}).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$I = \frac{2}{5} (1 - e^{-2\pi}).$$

3. Notons I l'intégrale. I est égale à $\Re e(J)$ avec $J = \int_0^\pi x^2 e^{(1+i)x} dx$ (on a posé $\cos x = \Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}J &= \left[\frac{x^2 e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi^2 e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx.\end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx &= \left[\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{1}{1+i} \int_0^\pi e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2} \left[e^{(1+i)x} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2} (-1 - e^\pi).\end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J = -\pi^2 e^\pi \frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2} (-1 - e^\pi),$$

soit

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1-\pi^2}{2} e^\pi.$$

Exercice 49.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$ | 2. $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x$ | 4. $x \mapsto \frac{1}{\cosh x (1 + \sinh x)}$ |

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Une primitive est par exemple la fonction F définie par

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cosh t} dt = \int_0^x \frac{2e^t}{1+e^{2t}} dt.$$

On calcule cette intégrale à l'aide du changement de variables $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ est une bijection de classe C^1 de $[0, x]$ sur $[1, e^x]$, de bijection réciproque $u \mapsto \ln u$). On en déduit que

$$F(x) = \int_1^{e^x} \frac{2du}{1+u^2} = [2 \arctan(u)]_1^{e^x} = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

2. On réalise là-aussi le changement de variables $u = e^x$, $du = e^x dx$ soit $dx = du/u$ et on trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{u(1+u)} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \ln \left(\frac{u}{1+u} \right) + C \\ &= \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + C. \end{aligned}$$

3. On pose $u = e^x$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x dx &= \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 + 2u + 1} du \\ &= \int du - \int \frac{4u}{(u+1)^2} du \\ &= u - \int \frac{4}{u+1} + \int \frac{4}{(u+1)^2} \\ &= u - 4 \ln(1+u) - \frac{4}{1+u} + C \\ &= e^x - 4 \ln(1+e^x) - \frac{4}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

4. Le changement de variables le plus malin ici est $u = \sinh x$, de sorte que

$$\frac{dx}{\cosh x} = \frac{\cosh x dx}{\cosh^2 x} = \frac{du}{1+u^2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cosh x(1+\sinh x)} dx &= \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \int \frac{-u/2 + 1/2}{u^2 + 1} du + \int \frac{1/2}{1+u} du \\ &= \frac{-1}{4} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du + \int \frac{1}{2} \frac{du}{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |1+u| \\ &= \frac{-1}{4} \ln(u^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan(u) + \frac{1}{2} \ln |1+u| + C \\ &= \frac{-1}{2} \ln(\cosh x) + \frac{1}{2} \arctan(\sinh x) + \frac{1}{2} \ln |1+\sinh x| + C. \end{aligned}$$

Exercice 50.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \sin^5 x \quad 2. x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x \quad 3. x \mapsto \cos(3x) \cos^3 x.$$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}) \\ &= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5 \sin(3x)}{16} + \frac{5 \sin(x)}{8}. \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5 \cos(3x)}{48} - \frac{5 \cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + e^{-i4x} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6) \\ &= \frac{1}{2^4} (2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6). \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6} (2 \cos(6x) + 12 \cos(4x) + 30 \cos(2x) + 20).$$

On a donc

$$\cos^4 x - \cos^6 x = -\frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $(\cos(3x) + 3 \cos(x))/4$. Avec la formule

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} (\cos(p+q) + \cos(p-q))$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned} \int \cos(3x) \cos^3 x &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(6x) + 3 \cos(4x) + 3 \cos(2x)) dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sin(6x)}{48} + \frac{3 \sin(4x)}{32} + \frac{3 \sin(2x)}{16} + C. \end{aligned}$$

Exercice 51.

1. Démontrer par récurrence que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(mx) dx = 0$$

- on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

2. En déduire que

$$\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(nx) dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Correction.

1. On va procéder par récurrence sur n . Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) = " \forall m \geq n, \int_0^\pi \cos^n(x) \cos(mx) dx = 0 ".$$

Initialisation : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, pour tout $m > 0$, on a

$$\int_0^\pi \cos(mx) dx = \left[\frac{1}{m} \sin(mx) \right]_0^\pi = 0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $m > n+1$. Alors, on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x) \cos(mx) dx = \int_0^\pi \cos^n x \cos(x) \cos(mx) dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = mx$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^n(x) \cos((m+1)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^n(x) \cos((m-1)x) dx.$$

Mais comme $m > n+1$, on a $m+1 > n$ et $m-1 > n$ et donc les deux intégrales sont nulles d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. On va également procéder par récurrence. Notons, pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) = " \int_0^\pi \cos^n(x) \cos(nx) dx = \frac{\pi}{2^n} ".$$

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet,

$$\int_0^\pi \cos^0(x) \cos(0x) dx = \int_0^\pi dx = \pi = \frac{\pi}{2^0}.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x) \cos((n+1)x) dx = \int_0^\pi \cos^n x \cos(x) \cos((n+1)x) dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = (n+1)x$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos((n+1)x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^n(x) \cos((n+2)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^n(x) \cos(nx) dx.$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat de la première question (pour la première intégrale), on trouve bien que

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos((n+1)x) dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 52.

Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{\cos^6 x}$ sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$.

Correction.

Puisqu'on sait qu'une primitive de $\frac{1}{\cos^2 x}$ est $\tan x$, on est incité à utiliser le changement de variables $t = \tan x$. Utilisant

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ et } 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int (1 + t^2)^2 dt \\ &= \int (1 + 2t^2 + t^4) dt \\ &= t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \\ &= \tan x + \frac{2 \tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 53.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2 t} dt \quad 2. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \quad 3. \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(x)) \tan(x) dx.$$

Correction.

1. On pose $u = \cos t$, de sorte que $dt = -\cos u du$. Il vient $\sin^3 t dt = (\sin^2 t) \sin t dt = -(1 -$

$u^2)du$. De plus, pour $t = 0$, $u = 1$ et pour $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à

$$I = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-u^2}{1+u^2} du = - \int_{\sqrt{2}/2}^1 du + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{u^2+1} du$$

soit

$$I = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\sqrt{2}/2).$$

2. Là aussi, le meilleur changement de variables est $u = \cos x$, de sorte que $du = -\sin x dx$. Pour le faire apparaître dans l'intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= \int_{1/2}^0 \frac{-du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

3. C'est encore le même changement de variables qui est le meilleur !

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(x)) \tan(x) dx &= \int_{1/2}^1 \frac{1+u}{u} du \\ &= [u + \ln u]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2} + \ln 2. \end{aligned}$$

Exercice 54.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x} dx \quad 2. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

Correction.

1. On pose

$$w(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x} dx$$

et on remarque que $w(-x) = w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au change-

ment de variables $t = \cos x$. Il vient $dt = -\sin x dx$ et donc

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{-dt}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)}.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que

$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)} = \frac{1}{t(t - \sqrt{2})(2t + \sqrt{2})} = \frac{-1}{2t} + \frac{1}{6(t - \sqrt{2})} + \frac{2}{3(2t + \sqrt{2})}.$$

On en déduit

$$I = \left[-\frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} - t) + \frac{1}{3} \ln(2t + \sqrt{2}) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

(il faut prendre garde que $t - \sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :

$$I = \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{3} \ln(2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{6} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \ln(2\sqrt{2}).$$

Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

2. Aucune des règles de Bioche ne s'applique, et on est conduit à poser $u = \tan(x/2)$, de sorte que

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{(u + \frac{1}{2})^{1/2} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 55.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^\pi \frac{1 - \cos(x/3)}{\sin(x/2)} dx \quad 2. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}.$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue sur $]0, \pi]$, et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on a $f(x) \sim_0 x/9$). On commence par effectuer le changement de variables $t = x/6$, de sorte que, notant I l'intégrale,

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos(2t)}{\sin(3t)} 6dt = 12 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{3 \sin t - 4 \sin^3 t} dt,$$

soit encore, après simplification :

$$I = 12 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t}{4 \cos^2 t - 1} dt.$$

On effectue alors le changement de variables $u = \cos t$, de sorte que $du = -\sin t dt$, et

$$I = -12 \int_{\sqrt{3}/2}^1 \frac{du}{4u^2 - 1} = -6 \int_2^{\sqrt{3}} \frac{dv}{v^2 - 1}.$$

Écrivant $\frac{2}{v^2-1} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}$, puis intégrant, on trouve

$$I = -3 \left[\ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right]_2^{\sqrt{3}} = 3 \ln \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3} \right).$$

2. La règle de Bioche nous dit que le changement de variables approprié est $u = \cos x$. Pour le faire apparaître, on écrit

$$\frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \frac{dx}{\sin x(1 + 2 \cos x)} = \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)(1 + 2 \cos x)}.$$

On obtient, notant J l'intégrale,

$$J = \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$

On décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{1/6}{1-u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{4/3}{1+2u}.$$

On peut alors finir le calcul de J :

$$\begin{aligned} J &= \left[-\frac{1}{6} \ln |1-u| - \frac{1}{2} \ln |1+u| + \frac{2}{3} \ln |1+2u| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 3. \end{aligned}$$

Exercice 56.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}}$
2. $x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
3. $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Correction.

1. La fonction est définie et continue sur $[-2, +\infty[\setminus\{-1\}]$. Le calcul sera donc valable sur les intervalles $[-2, -1[$ et $] -1, +\infty[$. On effectue le changement de variables $u = \sqrt{x+2}$, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est bijective et C^∞ sur $] -2, +\infty[$, de sorte que $du = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = \frac{dx}{2u}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \sqrt{x+2}} &= \int \frac{2u}{1-u} du \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) du \\ &= 2(-\ln|1-u| - u) + C \\ &= -2\ln|1 - \sqrt{x+2}| - 2\sqrt{x+2} + C. \end{aligned}$$

2. La fonction est définie sur $] -1, 1[$, et on effectue le changement de variables $x = \sin u$, avec $u \in]-\pi/2, \pi/2[$, de sorte que $dx = \cos u du$. On trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos u}{\cos^2 u \cos u} du \\ &= \int \frac{du}{\cos^2 u} \\ &= \tan(u) + C \\ &= \frac{\sin u}{\cos u} + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C. \end{aligned}$$

3. On pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, de sorte que $x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$ et $dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2} du$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{4u^2}{(1-u^2)} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\ &= -\frac{1}{u-1} + \ln|u-1| - \frac{1}{u+1} - \ln|1+u| + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} - \ln \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| + C \end{aligned}$$

Exercice 57.

On se propose de calculer $I = \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I .

Correction.

1. On a tout simplement :

$$-x^2 + 2x + 8 = -(x^2 - 2x - 8) = -((x-1)^2 - 9) = 9 - (x-1)^2.$$

2. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{5/2} \sqrt{9 - (x-1)^2} dx \\ &= 3 \int_1^{5/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2} dx \end{aligned}$$

On pose alors $u = \frac{x-1}{3}$ de sorte de se ramener à une intégrale du type $\int \sqrt{1-u^2} du$, que l'on sait calculer. On a $dx = 3du$, et le changement de variables est affine, donc bijectif. On en déduit que

$$I = 9 \int_0^{1/2} \sqrt{1-u^2} du$$

On pose ensuite $u = \sin t$. La fonction $\sin$ réalisant une bijection de l'intervalle $[0, \pi/6]$ sur l'intervalle $[0, 1/2]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} I &= 9 \int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= 9 \int_0^{\pi/6} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{9}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 58.

Calculer $\int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx$.

Correction.

On commence par écrire le trinôme sous forme canonique :

$$I = \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \int_1^2 x \sqrt{(x-1)^2 + 4} dx.$$

On trouve un terme de la forme $\sqrt{u^2 + 1}$, pour $(x-1)^2 = 4u^2$. Ceci nous incite à poser $u = \text{sh}(t)$, soit encore $x-1 = 2\text{sh}t$. En posant $\alpha = \text{Argsh}(1/2)$, on obtient

$$I = \int_0^\alpha (1 + 2\text{sh}t) \times 2\text{ch}t \times 2\text{ch}t dt = \int_0^\alpha 4\text{ch}^2t + 8 \int_0^\alpha \text{sh}(t)\text{ch}^2(t) dt.$$

Utilisant $2\text{ch}^2(t) = 1 + \text{ch}(2t)$, on obtient

$$I = 2 \left[t + \frac{\text{sh}(2t)}{2} \right]_0^\alpha + \frac{8}{3} [\text{ch}^3t]_0^\alpha = 2\alpha + \text{sh}(2\alpha) + \frac{8}{3}\text{ch}^3\alpha - \frac{8}{3}.$$

Ceci peut encore se simplifier en exprimant $\text{sh}(2\alpha)$ en fonction de $\text{sh}(\alpha)$ et $\text{ch}(\alpha)$, ie $\text{sh}(2\alpha) = 2\text{sh}(\alpha)\text{ch}(\alpha)$, et en remarquant que $\text{ch}^2\alpha - \text{sh}^2\alpha = 1$. On obtient finalement

$$I = 2\alpha + \frac{13\sqrt{5}}{6} - \frac{8}{3}.$$

Exercice 59.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ | 2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ | 4. $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ |
| 6. $x \mapsto \sin^5(x)$ | 6. $x \mapsto \arctan(x)$ |

Correction.

- On remarque simplement que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est donc $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
- On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$. La méthode précédente donne

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x+2).$$

- Le dénominateur se factorise en $(1-x)(1+x)$. On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve

$$a = -1/2, \quad b = 1/2.$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ est donc $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1|$.

4. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x(ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d)).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x \mapsto e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$ lorsque $a = 2$, $3a + b = -3$, $2b + c = 5$ et $c + d = 1$, soit $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et $d = -4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C.$$

5. On a

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}) \\ &= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5\sin(3x)}{16} + \frac{5\sin(x)}{8}. \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5\cos(3x)}{48} - \frac{5\cos(x)}{8}.$$

6. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= \arctan x & u'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \int \frac{t}{t^2 + 1} dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g , et donc

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$