

Feuille d'exercices n°2

Exercices obligatoires : 1, 3, 10, 11, 17, 18.

1. Intégrales généralisée**Exercice 1.**

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_1^{+\infty} \ln t dt & 2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt. \\ 1. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \end{array}$$

Exercice 2.

Quelle est la nature de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

Exercice 3.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 \ln t dt & 2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ 3. \int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx & 4. \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt \\ 5. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \end{array}$$

Exercice 4.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \\ 3. \int_0^1 \cos^2 \left(\frac{1}{t} \right) dt \end{array}$$

Exercice 5.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt & 2. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \\ 3. \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt & \end{array}$$

Exercice 6.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 7.

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t) dt$ tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin t} dt$ diverge.

Exercice 8.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad 2. \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$$

Exercice 9.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 \frac{dt}{1 - \sqrt{t}} & 2. \int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln \left(\frac{t}{t+1} \right) \right) dt \\ 3. \int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + ax} \right) dx, \quad a \in \mathbb{R}. & 4. \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt. \end{array}$$

Exercice 10.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Exercice 12.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x) dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x) dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$.

Exercice 13.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$
2. $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt, a > 0.$

Exercice 14.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n , on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n .
3. Soit $\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
5. En déduire que $J_n - I_n \rightarrow 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \rightarrow I$.
7. En déduire la valeur de I .

Exercice 15.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $b > a > 0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$ si on ne suppose plus que $f(0) = 0$.

Exercice 16.

Déterminer la limite, lorsque $x \rightarrow 0^+$, de $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Exercice 17.

Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 18.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.