

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

Exercices obligatoires : 1, 3, 10, 11, 17, 18.

1. Intégrales généralisée

Exercice 1.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_1^{+\infty} \ln t dt & 2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt. \\ 1. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \end{array}$$

Correction.

1. La fonction $\ln$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geq e$, $\ln(t) \geq 1$; or $\int_e^{+\infty} 1 dt$ diverge donc par comparaison $\int_e^{+\infty} \ln(t) dt$ diverge et donc $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ également.

On pouvait également remarquer qu'on connaît une primitive de $\ln$, à savoir $x \mapsto x \ln x - x$. On a donc

$$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t - t]_1^x = x \ln x - x + 1$$

qui tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$. Ainsi l'intégrale diverge.

2. Ici, on ne connaît pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0.$$

Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (critère de Riemann en $+\infty$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. En $+\infty$, $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$. Or $e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \frac{1}{t^2}$ car $t^2 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$; donc d'après le critère de Riemann en $+\infty$, on a, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ est convergente.

4. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ est convergente.

Exercice 2.

Quelle est la nature de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

Correction.

La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a

$$e^{-\sqrt{\ln t}} t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t} + \alpha \ln t} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$.

Exercice 3.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. $\int_0^1 \ln t dt$ | 2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ |
| 3. $\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ | 4. $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$ |
| 5. $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ | |

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, 1]$, le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut : <ul class="rien">
2. remarquer qu'on connaît une primitive de $\ln$, à savoir $x \mapsto x \ln x - x$. On a donc

$$\int_X^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_X^1 = -X \ln X + X - 1$$

qui tend vers -1 si X tend vers 0.

3. comparer : On sait que $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Ceci signifie que $\ln x = o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\int_0^1 \ln x dx$ converge.
4. Ici, on ne connaît pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0.$$

Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$, $|xe^{-x} \sin x| \leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $xe^{-x} \sin(x) = o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.
6. La fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$, fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison, $\int_0^1 \ln te^{-t} dt$ converge. Au voisinage de l'infini, on remarque que $t^2 \ln te^{-t}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Ainsi, $\ln te^{-t} =_{+\infty} o(1/t^2)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \ln te^{-t} dt$ converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln te^{-t} dt$.
7. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge.

Exercice 4.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \\ 3. \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt & \end{array}$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, $\frac{1}{e^t - 1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ est divergente. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ est divergente.
2. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ est convergente.

3. La fonction $t \mapsto \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, on a

$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$

Puisque $\int_0^1 1 dt$ converge (ce n'est même pas une vraie intégrale généralisée), on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(1/t) dt$ est aussi convergente.

Exercice 5.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt & 2. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \\ 3. \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt & \end{array}$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$ qui est intégrable au voisinage de 0. En $+\infty$, on écrit simplement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \frac{\ln t}{t^2+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0.$$

Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge.

2. La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. En 1, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x-1}} = 1$$

et donc

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1. En l'infini, l'idée est que le $\sqrt{\ln x}$ ne compte presque pas par rapport à $x^{3/2}$. Précisément, on écrit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/4} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{1/4}} = 0.$$

Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction est intégrable sur $]1, +\infty[$.

3. La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a

$$e^{-\sqrt{\ln t}} t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t} + \alpha \ln t} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$.

Exercice 6.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Correction.

1. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta} \rightarrow 0$$

et donc, en notant f la fonction, on a

$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f$.

2. Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $u' u^{-\beta}$. Elle admet donc une primitive de la forme $\frac{1}{-\beta+1} u^{-\beta+1}$ si $\beta \neq 1$, et de la forme $\ln |\ln u|$ si $\beta = 1$. Pour $\beta \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1} ((\ln X)^{-\beta+1} - 1) \end{aligned}$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, ceci admet une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Dans le cas où $\beta = 1$, la primitive se calcule un peu différemment :

$$\int_e^X \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_e^X = \ln |\ln X| - \ln |\ln e| = \ln \ln X.$$

Ceci tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale n'est pas convergente.

3. On remarque que

$$\frac{\frac{1}{t}}{f(t)} = t^{\alpha-1} (\ln t)^\beta \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t} =_{+\infty} o(f(t)).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f(t) dt$.

En conclusion, l'intégrale étudiée converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 7.

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin t} dt$ diverge.

Correction.

1. Posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors les hypothèses nous disent que F admet une limite ℓ en $+\infty$. Or,

$$\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt = F(y_n) - F(x_n) \rightarrow \ell - \ell = 0.$$

2. Posons $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = (2n+2)\pi$. Alors si $t \in [x_n, y_n]$, on a $t \sin t \leq 0$ et donc $e^{-t \sin t} \geq e^0 = 1$. On en déduit que $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t \sin t} dt \geq 1$. En particulier, cette quantité ne tend pas vers zéro, et donc l'intégrale est divergente.

Exercice 8.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad 2. \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0, puisque $t \ln t \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0. De plus, au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$. On distingue alors deux cas :

- Si $\alpha \leq 1$, alors $2\alpha - 1 \leq 1$, et donc $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, on en déduit que l'intégrale est divergente.
- Si $\alpha > 1$, alors $2\alpha - 1 > 1$. L'idée est que le terme le plus important est le dénominateur, $\frac{1}{t^{2\alpha-1}}$. Le logarithme au numérateur nous ennuie un peu, mais on va le traiter en réduisant un peu l'exposant du dénominateur. Précisément, soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < 2\alpha - 1$. Alors on a

$$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{-\delta} \ln t \rightarrow 0$$

avec $-\delta = \gamma - (2\alpha - 1) < 0$. On en déduit que

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ et par suite de $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$.

En conclusion, l'intégrale est convergente ssi $\alpha > 1$.

2. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il peut y avoir éventuellement deux problèmes, l'un en 0, l'autre en $+\infty$. Pour $\alpha \geq -1$, on a au voisinage de $+\infty$

$$f(x) \geq x^\alpha \geq 0.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge (on a supposé $\alpha \geq -1$), il en est de même de $\int_0^{+\infty} f$. On peut donc se concentrer sur le cas $\alpha < -1$. Séparons alors l'étude en 0 et celle en $+\infty$.

- (a) En 0. On a $e^{\alpha x} \rightarrow 1$ et donc $\ln(1 + e^{\alpha x}) \rightarrow 0$. Pour en savoir un peu plus, il faut faire un développement limité. Utilisant $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$, on trouve

$$f(x) = x^\alpha \ln(1 + (\alpha + 1)x + o(x)) = x^\alpha((\alpha + 1)x + o(x)) = (\alpha + 1)x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$

On en déduit que $f \sim_0 (\alpha + 1)x^{\alpha+1}$ (remarquons que $\alpha + 1 \neq 0$ puisque $\alpha < -1$). Puisqu'on a affaire à des fonctions qui gardent un signe constant, on en déduit que $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\int_0^1 x^{\alpha+1} dx$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$ soit $\alpha > -2$.

- (b) En $+\infty$. On fait un développement limité de $\ln(x + e^{\alpha x})$. Puisque $\alpha < -1$, on sait que $e^{\alpha x}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'où

$$\ln(x + e^{\alpha x}) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln(x) + o(1).$$

On en déduit que

$$f(x) \sim_{+\infty} x^\alpha \ln x.$$

On se ramène à une intégrale de Bertrand. Rappelons pourquoi dans le cas particulier de l'exercice elle est convergente. Puisque $\alpha < -1$, on peut choisir $\gamma \in]\alpha, -1[$. Mais alors,

$$x^\alpha \ln x = o(x^\gamma) \text{ (faire le quotient des deux quantités)}$$

et comme $\int_1^{+\infty} x^\gamma dx$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} f$.

En conclusion, on a prouvé que l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha \in]-2, -1[$.

Exercice 9.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\int_0^1 \frac{dt}{1 - \sqrt{t}}$
2. $\int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$
3. $\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^3 \sqrt{x^3 + ax}\right) dx, a \in \mathbb{R}.$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

Correction.

1. La fonction $\frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ est continue sur $[0, 1[$. Le problème de convergence de l'intégrale est donc en 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité en 1 en posant $x = 1 + u$. Lorsque x tend vers 1, u tend vers 0. De plus,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{x} &= 1 - \sqrt{1 + u} \\ &= 1 - (1 + u/2 + o(u)) \\ &= -u/2 + o(u) \\ &\sim_0 (1 - x). \end{aligned}$$

La fonction est donc équivalente en 1 à $\frac{1}{1-x}$. Cette dernière fonction n'est pas intégrable (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ est divergente.

2. La fonction que l'on cherche à intégrer est continue sur $[0, +\infty[$. Il faut étudier le problème en $+\infty$. Puisque $\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il y a une forme indéterminée et le problème n'est pas trivial. On va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) &= -\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit, en notant f la fonction, que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(t) = 1 - 1 + \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \implies f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

3. On factorise par le terme dominant dans la racine, puis on effectue un développement limité de $(1+u)^\alpha$:

$$(x^4 + x^2 + 1)^{1/2} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2}.$$

On effectue le développement limité jusqu'aux termes en $1/x^4$. Posant

$$u = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

on a

$$u^2 = \frac{1}{x^4} + o(1/x^4)$$

et donc

$$\begin{aligned}x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} &= x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

De même, on prouve que

$$x \sqrt[3]{x^3 + ax} = x^2 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En soustrayant les deux développements limités, et en notant f la fonction, on obtient que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \left(\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On distingue alors deux cas :

- Si $a \neq 3/2$, alors la fonction est équivalente à $\frac{1}{2} - \frac{a}{3}$, et donc l'intégrale est divergente.
 - Si $a = 3/2$, la fonction est équivalente à $\frac{5}{8x^2}$, et donc l'intégrale est convergente.
4. La fonction $f : t \mapsto e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. Pour étudier le problème en $+\infty$, il suffit de remarquer que

$$f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$, ce qui montre la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. En 0, on fait un développement limité pour étudier le comportement. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t - t^2/2 + o(t^2)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1 - t/2 + o(t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1/2$. Ceci achève de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 10.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Correction.

La fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, au voisinage de 0, on a

$$(\ln x)^n = o(1/\sqrt{x}).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann, l'intégrale est convergente en 0. On va obtenir une formule de récurrence pour exprimer I_n en fonction de I_{n-1} en réalisant une intégration par parties. Pour cela, prenons $a \in]0, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_a^1 - n \int_a^1 \frac{x(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ &= -a(\ln a)^n - n \int_a^1 (\ln x)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0 et on obtient, puisque $a(\ln a)^n \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow 0$,

$$I_n = -n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n I_{n-1}.$$

Par récurrence, on prouve alors facilement que

$$I_n = (-1)^n n! I_0.$$

Or, $I_0 = 1$, et donc $I_n = (-1)^n n!$.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Correction.

1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0, +\infty[$, et elle vérifie $|\frac{f(x)}{1+x^2}| \leq \frac{M}{1+x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ converge. De même, $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0, +\infty[$ (attention, on n'a plus obligatoirement continuité en 0). Le problème en $+\infty$ se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que

$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2} \leq M,$$

et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.

2. Effectuons le changement de variables $u = 1/x$. On trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{f(1/u) - 1}{1 + \frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx.$$

3. On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0, +\infty[$). On trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx := A.$$

Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :

$$2A = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ces deux intégrales sont donc égales à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x)dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x)dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx$.

Correction.

1. Par l'inégalité des accroissements finis, et puisque la dérivée de $\arctan$ est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$, on sait que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$|\arctan(x+1) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \times (x+1-x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann (convergente), la fonction $x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $\arctan$ croît vers $\pi/2$ en $+\infty$. Il existe donc un réel A tel que, pour tout $x \geq A$, on a

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mais alors, pour $X \geq A$, en intégrant cette dernière inégalité entre X et $X+1$, on a

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \int_X^{X+1} \arctan(x)dx \leq \frac{\pi}{2}$$

ce qui prouve bien ce que nous voulions démontrer. Une autre méthode est de remarquer que, puisque la fonction $\arctan$ est croissante, pour tout $x \in [X, X+1]$, on a

$$\arctan X \leq \arctan x \leq \arctan(X+1).$$

Par intégration, on a

$$\arctan X \leq \int_X^{X+1} \arctan(x)dx \leq \arctan(X+1).$$

Mais $\arctan(X) \rightarrow \pi/2$ et $\arctan(X+1) \rightarrow \pi/2$ lorsque $X \rightarrow +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\int_X^{X+1} \arctan(x)dx$ tend vers $\pi/2$ également.

3. Calculons cette intégrale par intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x)dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

4. Posons, pour $X > 0$, $F(X) = \int_0^X (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx$. Alors

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^X \arctan(x+1)dx - \int_0^X \arctan(x)dx \\ &= \int_1^{X+1} \arctan(x)dx - \int_0^X \arctan(x)dx \\ &= \int_X^{X+1} \arctan(x)dx - \int_0^1 \arctan(x)dx. \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, en faisant tendre X vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 13.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt & 2. \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt \\ 3. \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt, \quad a > 0. & \end{array}$$

Correction.

1. Au voisinage de 0, la fonction à intégrer est équivalente à $\ln t$, qui est une fonction intégrable en 0. Au voisinage de 1, on a

$$\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim_1 \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}.$$

La fonction se prolonge donc par continuité en 1, ce qui achève de prouver la convergence de l'intégrale entre 0 et 1. Pour calculer sa valeur, on réalise le changement de variables $u = \sqrt{1-t}$. On trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt &= 2 \int_0^1 \ln(1-u^2) du \\ &= 2 \int_0^1 \ln(1-u) du + 2 \int_0^1 \ln(1+u) du \\ &= 2 \int_0^1 \ln(x) dx + 2 \int_1^2 \ln(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 \ln(x) dx \\ &= 2 [x \ln x - x]_0^2 \\ &= 4 \ln 2 - 4. \end{aligned}$$

2. Pour la convergence de l'intégrale, il suffit de remarquer que la fonction est continue sur

$[0, +\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle est dominée par $\frac{1}{t^2}$. En effet, on a

$$t^2 \times te^{-\sqrt{t}} = t^3 e^{-\sqrt{t}} = e^{3 \ln t - \sqrt{t}} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variables $u = \sqrt{t}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du.$$

On effectue ensuite des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt &= 2 [-u^3 e^{-u}]_0^{+\infty} + 6 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \\ &= 6 [-u^2 e^{-u}]_0^{+\infty} + 12 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du \\ &= 12 [-u e^{-u}]_0^{+\infty} + 12 \int_0^{+\infty} e^{-u} du \\ &= 12. \end{aligned}$$

3. On remarque d'abord que $|\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $a > 0$) et donc la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ est elle-même intégrable. Pour calculer l'intégrale, il suffit d'écrire que $\sin t$ est la partie imaginaire de e^{it} ... Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt &= \Im m \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-a)t} dt \right) \\ &= \Im m \left(\left[\frac{1}{i-a} e^{(i-a)t} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \Im m \left(\frac{1}{a-i} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

Exercice 14.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n , on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n .
3. Soit $\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
5. En déduire que $J_n - I_n \rightarrow 0$.

6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \rightarrow I$.
7. En déduire la valeur de I .

Correction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur $2n+1$. Ainsi, il n'y a pas de problèmes de convergence en 0. Le raisonnement est identique pour la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$.

2. Il suffit de remarquer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, on a grâce à une formule de trigonométrie

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2 \cos(2nt) dt = 0.$$

3. Ceci résulte d'une intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt &= -\frac{1}{2n+1} \left(\phi(\pi/2) \cos((2n+1)\pi/2) - \phi(0) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \phi'(t) \cos((2n+1)t) dt. \right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\left| \int_0^{\pi/2} \phi'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\phi'(t)| dt,$$

on en déduit bien la convergence vers zéro souhaitée.

4. Il est facile de voir que $\phi(t) \sim_0 -\frac{t}{6}$, ce qui prouve que ϕ se prolonge par continuité en 0. De plus, on a

$$\phi'(t) = \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}.$$

Pour t tendant vers 0, l'utilisation des développements limités prouve facilement que $\phi'(t)$ tend vers $-1/6$. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, ceci prouve que ϕ définit une fonction C^1 sur $[0, \pi/2]$.

5. On a

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt,$$

avec $\phi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$. D'après les deux questions précédentes, on a bien $I_n - J_n \rightarrow 0$.

6. Ceci vient du changement de variables $u = (2n+1)t$:

$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow I.$$

7. On a $I = \lim_n J_n = \lim_n I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 15.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $b > a > 0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$ si on ne suppose plus que $f(0) = 0$.

Correction.

1. Notons, pour $x > 0$, $\varepsilon(x) = \sup\{|f(t)|; t \in [ax, bx]\}$. Puisque f est continue en 0 et que $f(0) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Mais on peut écrire que

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \varepsilon(x) \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon(x) \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Ceci tend bien vers 0 si x tend vers 0.

2. Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. Alors d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0.$$

Mais, puisque $\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$, on en déduit par linéarité que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Exercice 16.

Déterminer la limite, lorsque $x \rightarrow 0^+$, de $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Correction.

On sait que $\sin t = t + t^2 \varepsilon(t)$ où la fonction ε tend vers 0 en 0. On a donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt = \ln 2 + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt.$$

Puisque la fonction ε est bornée (disons par M) au voisinage de 0, on a

$$\left| \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt \right| \leq Mx \rightarrow 0,$$

et donc la limite recherchée est $\ln 2$.

Exercice 17.

Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\arctan t}{t} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t}$, qui est une fonction positive et dont l'intégrale diverge au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, on déduit que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt.$$

Puisque cette dernière intégrale se calcule aisément, on conclut que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

Exercice 18.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Correction.

On remarque d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge : en effet, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$. On intègre ensuite par parties, en intégrant $t \mapsto e^{-t}$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$. On obtient, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Or, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{e^{-t}}{t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions sont positives et intégrables), on trouve

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right).$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}.$$