Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°7

Exercices obligatoires : 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11

1. Exercices basiques

a. Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 1.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :
$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :
$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$
où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 2.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 3.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;
2. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

3. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0) ?

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 5.

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|),\ P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|),\ P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|),\ P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Exercice 7.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

c. Norme subordonnée

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, par :

$$\|A\| = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 10.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \sup\{|a_k|;\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme subordonnée de ϕ_c.

2. Exercices d'entraînement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \mathrm{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 14.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N).

b. Norme subordonnée

Exercice 15.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}(I)$ de la norme $\|.\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in C(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.

2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Déduire de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $|||u|||$ en fonction de $u(e)$.