Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°7

Exercices obligatoires : 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11

1. Exercices basiques

a. Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 1.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :
$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :
$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$
où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Correction.

1. On a :
$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$
2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore encore en
$$|xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$
On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire
$$|f(x,y)| \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2 + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2} \leq 4\|(x,y)\|_2.$$
Ainsi, si (x,y) tend vers 0, on a $|f(x,y)|$ qui tend vers 0.

Exercice 2.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Correction.

1. On a
$$|f(x,y)| \leq |x| + |y| \leq \|(x,y)\|_1.$$
La limite de f en $(0,0)$ est donc 0.
2. Non ! On a
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x,2x) = -\frac{3}{5}.$$
3. Non !
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = +\infty.$$

Exercice 3.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;
2. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.

Correction.

1. On a d'une part
$$f(1/n,0,0) = 0$$
et d'autre part
$$f(1/n,1/n,1/n) = \frac{2/n^2}{6/n^2} = \frac{1}{3}.$$
La limite de f en $(0,0,0)$ ne peut pas exister.
2. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2). Or, x^2+y^2-1 tend vers -1, et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. D'autre part, on a
$$|f_2(x,y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \to 1$ quand $(x,y) \to (0,0)$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$, et donc $f(x,y)$ tend vers $(-1,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$.

3. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \to \frac{1}{2}$ si $t \to 0$. Maintenant, on peut écrire

$$f(x,y) = x\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}.$$

De la remarque précédente, on tire que $\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0) ?

Correction.

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t,t) = \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $1/2$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 5.

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 =$

$\int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Correction.

1. Puisque g est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Posons $M = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$. Alors on a
$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leq M \int_0^1 |f(t)|dt \leq M\|f\|_1.$$
Ceci prouve que T est continue.
2. Supposons que T est continue. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a $\|TP\| \leq C\|P\|$. Soit $n \geq 0$. Pour $P = X^n$, on trouve
$$TP = nX^{n-1},\ \text{d'où } n = \|TP\| \leq C\|P\| = C.$$
Ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Donc T n'est pas continue.
3. On peut utiliser deux arguments différents. On peut d'une part remarquer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue. On peut aussi utiliser un calcul direct. En effet, soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$. Alors on a
$$\begin{aligned}\|TP\| &= \left\|\sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}\right\| \\ &= \sum_{k=1}^n k|a_k| \\ &\leq n\sum_{k=1}^n |a_k| \leq n\|P\|.\end{aligned}$$
Puisque n ne dépend pas de P (ceci ne dépend que de E), on obtient que T est continue.
4. On va prouver que T est continue par un calcul direct. Prenons en effet $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ (la somme est en fait finie). Alors on a :
$$\begin{aligned}\|TP\| &= \left\|\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}X^k\right\| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)k!|a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)!|a_{k+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k!|a_k| \\ &\leq \|P\|.\end{aligned}$$
Ceci prouve la continuité de P.
5. On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\|Tf\| = \int_0^1 |f(t)||g(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} = C\|f\|_2,$$

avec

$$C = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

C est bien un réel fini, car g est continue sur $[0,1]$, donc bornée, et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Correction.

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (donc C^1).
2. On a
$$|\phi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_1.$$
On en déduit que
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt \leq \|f\|_1.$$
Ainsi, ϕ est continue.
3. On a $\phi(f_n)(x) = \int_0^x ne^{-nt} dt = 1 - e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1 = \phi(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$. De plus,
$$\|\phi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx}) dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$
4. D'après la question 2, pour tout $f \in E$,
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1,$$
et donc $|||\phi||| \leq 1$. De plus, on a
$$\|\phi(f_n)\|_1 \leq |||\phi||| \|f_n\|_1 \implies 1 - e^{-n} \leq \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}\right) |||\phi|||.$$

Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $|||\phi||| \geq 1$, ce qui prouve finalement que $|||\phi||| = 1$.

Exercice 7.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

Correction.

Les deux normes sont équivalentes si et seulement s'il existe $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, on a $N_1(x) \leq aN_2(x)$ et $N_2(x) \leq bN_1(x)$. Si on réécrit ces deux inégalités sous la forme

$$N_1(Id(x)) \leq aN_2(x) \text{ et } N_2(Id(x)) \leq bN_1(x)$$

alors on en déduit que c'est équivalent à la continuité des deux applications mentionnées dans l'énoncé.

c. Norme subordonnée

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, par :

$$\|A\| = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme subordonnée.

Correction.

On remarque que l'application trace est linéaire. De plus, soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}(A)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|A\| \leq n\|A\|. \end{aligned}$$

Ceci prouve que l'application trace est continue et que $\|\mathrm{Tr}\| \leq n$. De plus, on a

$$\mathrm{Tr}(I_n) = n \text{ et } \|I_n\| = 1.$$

Ainsi, on a exactement $\|\mathrm{Tr}\| = n$.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Correction.

On remarque d'abord que Tf, étant une primitive d'une fonction continue, est bien de classe $\mathcal{C}^1$ donc élément de F. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, $(Tf)' = f$ et donc $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$. On en déduit que $\|Tf\|_F \leq 2\|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$. Nous allons maintenant démontrer que $\|T\| = 2$. Puisque $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$, il n'y a (jamais) aucune perte dans cette majoration, et on est amené à chercher une fonction $f \in E$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \|f\|_\infty$. Prenons $f = 1$. Alors $\|f\|_\infty = 1$, $Tf(x) = x$ et donc $\|Tf\|_\infty = 1$. Il vient $\|Tf\|_F = 2\|f\|_\infty$, et donc on a effectivement $\|T\| = 2$.

Exercice 10.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sup\{|a_k|;\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme subordonnée de ϕ_c.

Correction.

Supposons d'abord que $|c| < 1$. Alors, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$|\phi_c(P)| = \left|\sum_{k=0}^n a_k c^k\right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k||c|^k \leq \|P\|_\infty \frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|}.$$

Puisque $|c| < 1$, on en déduit que

$$|\phi_c(P)| \leq \|P\| \frac{1}{1-|c|}$$

donc ϕ_c est continue et $\|\phi_c\| \leq \frac{1}{1-|c|}$. On va prouver que cette dernière inégalité est en fait une égalité. D'abord, si $c \geq 0$, on considère le polynôme $P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors

$$\phi_c(P_n) = 1 + c + \cdots + c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Mais $\|P_n\| = 1$, et donc on obtient

$$\frac{1-c^{n+1}}{1-c} = \|\phi_c(P_n)\| \leq \|\phi_c\|\|P_n\| = \|\phi_c\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que $\|\phi_c\| \geq \frac{1}{1-c}$, ce qui donne l'autre inégalité. Si maintenant $c < 0$, on effectue le même travail avec le polynôme $Q(X) = 1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^n X^n$. Pour $c \geq 1$, on a $\phi_c(P_n) = 1 + c + \cdots + c^n \geq n + 1$ alors que $\|P_n\| = 1$. L'application ϕ_c ne peut pas être continue. On a le même résultat si $c \leq -1$, en considérant cette fois Q_n.

2. Exercices d'entraînement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Correction.

1. Supposons ϕ continue. Alors il existe $C \geq 1$ tel que
$$\|\phi(P)\| \leq C\|P\|$$
pour tout polynôme P. Prenons le polynôme $P(X) = X^n$. Alors $\|P\| = 1$. Mais $P(X+1) = (X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \ldots$. Ainsi, on obtient
$$n \leq \|P(X+1)\| \leq C,$$
ce qui impossible si on choisit n assez grand. Ainsi, ϕ n'est pas continue.
2. Écrivons $A(X) = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $AP(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec
$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$
Notons $M = \max_{j=0,\ldots p} |b_j|$. On a donc
$$|c_k| \leq M \sum_{i=\max(0,k-p)}^{k} |a_i|,$$
ce qui entraîne
$$\|AP\|_1 \leq M \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{i=\max(0,k-p)}^{k} |a_i|.$$
Fixons i_0 dans $\{0, \ldots, n\}$. S'il apparait dans la somme $\sum_{i=\max(k-p,0)}^{k} |a_i|$, c'est que $k - p \leq i_0 \leq k$. En particulier, il apparait au plus $k - (k-p) + 1 = (p+1)$ fois. On en déduit que
$$\|AP\|_1 \leq M(p+1)\|P\|_1,$$
ce qui prouve que ψ est continue.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Correction.

1. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. D'abord, si $u = 0$, on a bien $\|u\| = 0$. Réciproquement, si $\|u\| = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Considérons alors $y \in E$. Si $y = 0$, on a bien $u(y) = 0$. Si $y \neq 0$, considérons $x = y/\|y\|$. Alors $\|x\| = 1$, donc $u(x) = 0$, donc par homogénéité de u, $u(x) = 0$ et u est bien nulle. Considérons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\{\|\lambda u(x)\|;\ \|x\| = 1\} = |\lambda| \times \{\|u(x)\|;\ \|x\| = 1\}.$$

On en déduit que $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$. Finalement, soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Passant au sup sur x, on obtient bien que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Ainsi, la formule

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$$

définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, la formule est claire sinon posons $y = x/\|x\|$. Alors on a $\|u(y)\| \leq \|u\|$ ce qui implique facilement par homogénéité que $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$. Soit maintenant $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(v(x))\| \leq \|u\| \times \|v(x)\| \leq \|u\| \times \|v\|.$$

Passant au sup en x, on en déduit bien que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.

3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que
$$\ker(u - Id) \oplus \mathrm{Im}(u - Id) = E.$$
4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

Correction.

1. On a, par télescopage,
$$\sum_{k=0}^{n} u^k(u - Id) = u^{n+1} - Id$$
et donc $v_n = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - Id)$.
2. Soit $y \in \ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u - Id)(x)$. On en déduit que $v_n(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$. Puisque $\|u^{n+1}(x)\| \leq \|x\|$, on obtient que $(v_n(y))$ tend vers 0. Mais d'autre part, on sait aussi que $u(y) = y$, et donc, pour tout entier n, on a $v_n(y) = y$. Par unicité de la limite, $y = 0$.
3. C'est une conséquence immédiate du théorème du rang et du résultat de la question précédente.
4. Soit $x \in E$, écrivons $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - Id)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Alors le calcul effectué à la deuxième question montre que $v_n(y) = y$ et que $v_n(z)$ tend vers 0. Ainsi, $(v_n(x))$ tend vers y qui est bien égal à $p(x)$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 14.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N).

Correction.

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a(x) = e^{ax}$ est dans E, et elle vérifie $Df_a = af_a$. Or, si D était continue pour la norme N, il existerait une constante $C > 0$ telle que
$$N(D(f_a)) \leq CN(f_a)$$
pour tout $a \in \mathbb{R}$. On obtiendrait alors que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$|a|N(f_a) \leq CN(f_a) \implies |a| \leq C.$$
C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E, N).

b. Norme subordonnée

Exercice 15.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}(I)$ de la norme $\|.\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in C(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Déduire de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $|||u|||$ en fonction de $u(e)$.

Correction.

1. Remarquons que $|f| \geq f$, et donc $|f| - f \geq 0$. On en déduit que $u(|f|) \geq u(f)$. De même, on a $|f| \geq -f$, soit $|f| + f \geq 0$ et donc $u(|f|) \geq u(-f) = -u(f)$. Finalement, on obtient bien que $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. On sait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\|f\|_\infty e - |f| \geq 0$. Ainsi, on a

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq u(\|f\|_\infty e) \leq u(e)\|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que u est continue, avec $\|u\| \leq u(e)$. De plus, pour $f = e$, on a exactement $u(f) = u(e)\|e\|_\infty$, ce qui prouve qu'en réalité $\|u\| = u(e)$.