Chapitre I

Introduction aux Nombres Complexes

Table des matières

Partie A
Nombres complexes : la forme algébrique

1. L'ensemble des nombres complexes

On admet que l'on peut construire l'ensemble décrit dans le théorème suivant :

Théorème 1.

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé **ensemble des nombres complexes** qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et qui vérifie les propriétés suivantes :

- les opérations d'addition et de multiplication de $\mathbb{R}$ se prolongent sur $\mathbb{C}$ et conservent leurs propriétés algébriques *(ex : commutativité, éléments neutres, distributivité, ...)*
- $\mathbb{C}$ possède un nombre noté i qui vérifie $i^2 = -1$.
- tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de nombres réels.

Proposition 1.

Le nombre complexe i n'est pas un nombre réel.

Démonstration.

On suppose par l'absurde que i appartient à $\mathbb{R}$.
Comme tout nombre réel au carré est positif, on obtient :

$$-1 = i^2 \geq 0$$

Contradiction !
Il en résulte que i n'est pas un nombre réel. $\square$

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1.

Soit z un nombre complexe.

On appelle **forme algébrique** de z son écriture sous la forme $z = a+ib$ décrite dans le théorème précedent.

Le nombre a est appelé **partie réelle** de z et on le note $\mathrm{Re}(z)$.

Le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z et on le note $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple 1.

- le nombre $5 + 2i$ a pour partie réelle 5 et partie imaginaire 2
- le nombre $3 - 2i$ a pour partie réelle 3 et partie imaginaire -2
- $0 = 0 + 0i$; $1 = 1 + 0i$; $i = 0 + 1i$.

Exercice 1.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants et donner leurs parties réelles et imaginaires :

1. a puis ai pour $a \in R$;
2. $2 + \pi i$; $-1 + i$; $7 - i$;
3. $z + z'$; $z \times z'$; z^2 pour $z = 2 + 2i$ et $z' = 5 - 3i$

Correction.

1. On a $a = a + 0i$ donc $\mathrm{Re}(a) = a$ et $\mathrm{Im}(a) = 0$;
   on a $ai = 0 + ai$ donc $\mathrm{Re}(ai) = 0$ et $\mathrm{Im}(ai) = a$
2. $2 + \pi i$ est déjà sous forme algébrique donc $\mathrm{Re}(2 + \pi i) = 2$ et $\mathrm{Im}(2 + \pi i) = \pi$;
   $-1 + i = -1 + 1i$ donc $\mathrm{Re}(-1 + i) = -1$ et $\mathrm{Im}(-1 + i) = 1$;
   $7 - i = 7 + (-1)i$ donc $\mathrm{Re}(7 - i) = 7$ et $\mathrm{Im}(7 - i) = -1$;
3. $z + z' = (2 + 2i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (2 - 3)i = 7 - i$;
   $z \times z' = (2 + 2i)(5 - 3i) = 2 \times 5 - 2 \times 3i + 2i \times 5 - 2i \times 3i$;
   z^2 pour $z = 2 + 2i$ et $z' = 5 - 3i$

Définition 2.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
Si $a = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur*.

Exemple 2.

$2i$, πi, i et $-i$ sont des imaginaires purs alors que $3 + 2i$ et 5 ne le sont pas.

Remarque 1.

Si $b = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel.

Proposition 2.

Soit z un nombre complexe. Alors on a $z = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Démonstration.

On a note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$; alors $z = a + ib$.

— ($\Rightarrow$) On suppose $z = 0$.
Supposons par l'absurde que a et b sont non tous nuls.
1er cas : $b = 0$. Alors $a = z = 0$. Contradition, a et b sont non tous nuls
2eme cas : $b \neq 0$. Comme $a + ib = 0$, on a $i = -\frac{b}{a}$. Comme $a, b \in \mathbb{R}$, $i = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$. Contradiction car i n'appartient pas à $\mathbb{R}$.
Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. Par suite, a et b sont tous les deux nuls.

— ($\Leftarrow$) On suppose $a = 0$ et $b = 0$. Alors $z = 0 + i0 = 0$

□

Exercice 2.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $z = (x^3 + 3x^2 - 4x) + i(|x - 2| - 1)$. Déterminer les valeurs de x (si elles existent) pour lesquelles $z = 0$.

Correction.

On a $z = 0$ si, et seulement si, x vérifie $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$ et $|x - 2| - 1 = 0$. Résolvons ces deux équations :
On a $x^3 + 3x^2 - 4x = x(x^2 + 3x - 4) = x(x - 1)(x + 4)$ donc la première équation a pour solutions $x = 0$, $x = 1$ et $x = 4$.
La deuxième équation s'écrit $|x - 2| = 1$. Si $x \geq 2$, elle devient $x - 2 = 1$ et donc $x = 3$. Et si $x < 2$, elle devient $2 - x = 1$ et donc $x = 1$. Les solutions de la deuxième équation sont donc $x = 1$ et $x = 3$.

Ainsi, les deux équations sont vérifiées simultanénement si, et seulement si $x = 0$. Et donc $z = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

3. Opérations et forme algébrique

a. Opérations usuelles

Proposition 3.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ des nombres complexes et α un nombre réel. Les égalités suivantes décrivent la forme algébrique des nombres complexes suivants :

— $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
— $z - z' = (a - a') + i(b - b')$
— $\alpha z = (\alpha a') + i(\alpha b')$
— $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Correction.

Il s'agit d'utiliser les propriétés usuelles de distributivité, d'associativité de commutativité de $\mathbb{R}$ qui ont cours également dans C et le fait que $i^2 = -1$.

Corollaire 1.

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

— $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$

— $\mathrm{Re}(z-z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z-z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$

— $\mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha\mathrm{Im}(z)$

— $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z')\mathrm{Im}(z)$

Proposition 4.

Soit z, z' des nombres complexes. On a $z = z'$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Démonstration.

On a $z = z'$ si, et seulement si, $z - z' = 0$ et donc, d'après la proposition 2, si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z-z') = 0$ et $\mathrm{Im}(z-z') = 0$. Or d'après les propriétés des parties réelles et imaginaires, $\mathrm{Re}(z-z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z-z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$;
donc $z = z'$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z') = 0$ et $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') = 0$ et finalement :
$z = z'$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$. □

Exercice 3.

Résoudre l'équation d'inconnue z dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 = i$$

Correction.

On écrit $z = a + ib$, alors l'équation $z^2 = 0 + 1i$ est équivalente au système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$.

Par suite, $a^2 = b^2$ et donc $b = a$ ou $b = -a$.

Si $b = a$, on obtient par substitution $a^2 = \dfrac{1}{2}$ et donc $a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ et ainsi $z = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

Si $b = -a$, on obtient par substitution $a^2 = -\dfrac{1}{2}$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, les deux solutions (on vérifie réciproquement qu'elles le sont bien) sont $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Exercice 4.

Faire les exercices 1 à 13 p18

Exercice 5.

Faire l'exercice 30 p20

b. Inverse d'un nombre complexe

Définition 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z admet une *inverse* dans z s'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.

On démontrera dans le paragraphe dédié au conjugué la formule suivante qui donne la forme algébrique du quotient d'un nombre complexe :

Proposition-Notation 5.

Soit z un complexe **non nul**. Alors z admet une unique inverse dans $\mathbb{C}$ que l'on note $\dfrac{1}{z}$.
De plus, si $z = a + ib$, la forme algébrique de son inverse est :

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

4. Conjugué d'un nombre complexe

a. Définition

Définition 4.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$. On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib$$

Autrement dit $\overline{z}$ est le nombre complexe possédant la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée à celle de z.

Exemple 3.

- $5 + 3i$ a pour conjugué $5 - 3i$ i.e. $\overline{5 + 3i} = 5 - 3i$;
- $6i$ a pour conjugué $-6i$ i.e. $\overline{6i} = -6i$;
- 45 a pour conjugué 45 i.e. $\overline{45} = 45$;

b. Propriétés du conjugué

Proposition 6. *Conjugué et opérations*

Soit z, z' des nombres complexes et n un entier naturel. On a :

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$

Démonstration.

On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques de z, z'.

- On a :

$$\begin{array}{rcl} \overline{z+z'} & = & \overline{(a+a') + i(b+b')} \\ & = & (a+a') - i(b+b') \\ & = & (a-ib) + (a'-ib') \\ \overline{z+z'} & = & \overline{z} + \overline{z'} \end{array}$$

- On a :

$$\begin{array}{rcl} \overline{zz'} & = & \overline{(aa'-bb') + i(ab'+ba')} \\ & = & (aa'-bb') - i(ab'+ba') \\ & = & (a-ib)(a'-ib') \\ \overline{zz'} & = & \overline{z}.\overline{z'} \end{array}$$

- On démontre, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
  - **Initialisation :**
    Par convention, tout nombre complexe élévé à la puissance 0 vaut 1, d'où :
    $$\overline{z^0} = \overline{1} = 1 \text{ et } (\overline{z})^0 = 1$$
    donc $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$
    Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
  - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Montrons que $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$
    On a :
    $$\begin{array}{rcl} \overline{z^{n+1}} & = & \overline{zz^n} \\ & = & \overline{z}.\overline{z^n} \text{ d'après le point précédent} \\ & = & \overline{z}.\left(\overline{z}\right)^n \text{ par H.R.} \\ \overline{z^{n+1}} & = & (\overline{z})^{n+1} \end{array}$$
    Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

  Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
- On suppose $z \neq 0$. On a, d'après la formule du conjugué d'un produit :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}.\overline{z} = \overline{\frac{1}{z}.z} = \overline{1} = 1$$

Par suite, $\overline{z}$ est inversible d'inverse $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$. Par unicité de l'inverse, on a alors :

$$\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

□

Proposition 7.

Soit z un nombre complexe. Alors :

— z est réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$;

— z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$;

Démonstration.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$.

— $(\Rightarrow)$ On suppose que $z \in R$. Alors $b = 0$ et $z = a$. Donc on a :

$$\overline{z} = a - ib = a - i \times 0 = a = z.$$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\overline{z} = z$. Alors $a - ib = a + ib$ d'où $(2i)b = 0$. Si un produit dans $\mathbb{C}$ est nul alors un des facteurs est nul (propriété qui généralise celle connue sur $\mathbb{R}$) ; or $2i \neq 0$, donc $b = 0$ et ainsi $z = a \in \mathbb{R}$.

— $(\Rightarrow)$ On suppose que z imaginaire pur. Alors $b = 0$ et $z = -ib$. Donc on a :

$$\overline{z} = a - ib = 0 - ib = -ib = -z.$$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\overline{z} = -z$. Alors $a - ib = -a - ib$ d'où $2a = 0$. Si un produit dans $\mathbb{R}$ est nul alors un des facteurs est nul ; or $2 \neq 0$, donc $a = 0$ et ainsi $z = ib$ est imaginaire pur.

□

Proposition 8. *Propriétés du conjugué*

Soit z un nombre complexe. On a :

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

$$\bullet\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \text{ si } z \neq 0$$

Démonstration.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.

- On a :

$$\begin{aligned} \overline{(\overline{z})} &= \overline{a - ib} \\ &= a + ib \\ \overline{(\overline{z})} &= z \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 \\ z\overline{z} &= \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+ib)+(a-ib) \\ &= 2a \\ z+\overline{z} &= 2\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} z-\overline{z} &= (a+ib)-(a-ib) \\ &= 2ib \\ z-\overline{z} &= 2i\mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

- On suppose $z \neq 0$. Alors $\overline{z} \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \\ \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2} \end{aligned}$$

□

Méthode pour obtenir la forme algébrique d'une fraction :

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$. Pour obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{z}$, on multiplie le dénominateur et le numérateur par $\overline{z} = a - ib$.

c. Exercices

Exercice 6. *Basiques*

1. *Conjugué :* 14,16,17,18 p19
2. *Quotient :* 23,28 p19

Exercice 7. *Classiques*

1. Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $2z - \overline{z}^2$ est réel.
2. Résoudre l'équation $z + 5i = iz + 3$.
3. Résoudre l'équation $z + 5i = i\overline{z} + 3$.

Correction.

1.

Méthode : on peut procéder de deux manières,
— soit en utilisant que $\omega \in R$ si, et seulement si, $\overline{\omega} = \omega$;
— soit en utilisant $\omega \in R$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(\omega) = 0$.

Explicitons la première méthode :

Soiz $z \in C$. On a $2z - \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $2z - \overline{z}^2 = \overline{2z - \overline{z}^2}$. Or,

$$\begin{aligned} \overline{2z - \overline{z}^2} &= \overline{2z} - \overline{\overline{z}^2} \\ &= 2\overline{z} - z^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & 2z - \overline{z}^2 &= \overline{2z - \overline{z}^2} \\ \Leftrightarrow & & \\ & 2z - \overline{z}^2 &= 2\overline{z} - z^2 \\ \Leftrightarrow & & \\ & 2(z - \overline{z}) + \underbrace{z^2 - \overline{z}^2}_{(z-\overline{z})(z+\overline{z})} &= 0 \\ \Leftrightarrow & & \\ & (z - \overline{z})(2 + z + \overline{z}) &= 0 \\ \Leftrightarrow & & \\ & z - \overline{z} = 0 \text{ ou } 2 + z + \overline{z} = 0 & \\ \Leftrightarrow & & \\ & 2i\mathrm{Im}(z) = 0 \text{ ou } 2\mathrm{Re}(z) = -2 & \\ \Leftrightarrow & & \\ & \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{Re}(z) = -1 & \end{aligned}$$

Par suite, $2z - \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{R} \cup \{-1 + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$

2.

> **Méthode :** pour une équation faisant intervenir seulement z à la puissance 1 (équation polynomiale de degré 1), on peut procéder de deux manières,
> — soit en résolvant directement l'équation comme on avait l'habitude dans $\mathbb{R}$;
> — soit en utilisant la forme algébrique de z et la proposition 4.

Explicitons la première méthode : on a

$$\begin{aligned} & z + 5i &= iz + 3 \\ \Leftrightarrow & & \\ & z - iz &= 3 - 5i \\ \Leftrightarrow & & \\ & (1 - i)z &= 3 - 5i \\ \Leftrightarrow & & \\ & z &= \frac{3 - 5i}{1 - i} \\ \Leftrightarrow & & \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{3 - 5i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)(3 - 5i)}{1^2 + 1^2} = \dfrac{8 - 2i}{2} = 4 - i$.
La solution de l'équation est alors $z = 4 - i$.

3.

> **Méthode :** pour une équation faisant intervenir z et son conjugué, on utilise la forme algébrique de z et la proposition 4.

On considère la forme algébrique $z = a + ib$ de z. Alors $\overline{z} = a - ib$ et on a :

$$\begin{array}{rcl} z + 5i & = & i\overline{z} + 3 \\ \Leftrightarrow & & \\ a + ib + 5i & = & ia + b + 3 \\ \Leftrightarrow & & \\ a - b + i(b - a) & = & 3 - 5i \end{array}$$

Or deux nombres complexes sont égaux s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires, donc

$$\begin{array}{l} z + 5i \quad = \quad i\overline{z} + 3 \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a - b = 3 \\ b - a = -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a - b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} \\ \text{Impossible !} \end{array}$$

Cette équation n'a donc pas de solution !

Voir les exercices corrigés p13 et les exercices 30,34 p20

Partie B

Nombres complexes et géométrie

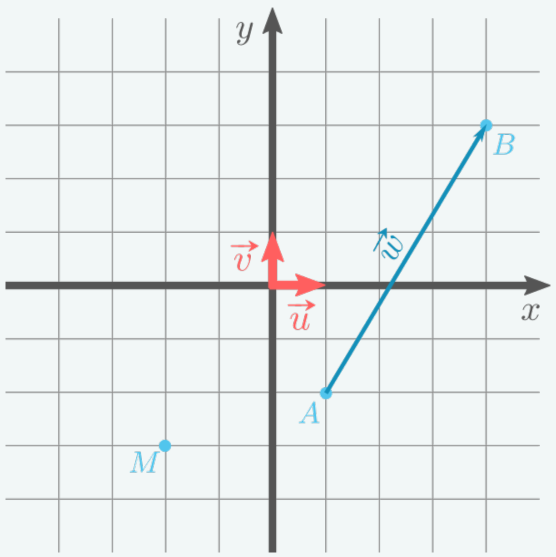
1. Affixe d'un point ou d'un vecteur

a. Affixe

Définition 5. *Plan complexe ; affixe d'un point/vecteur*

- On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- Soit M un point du plan complexe de coordonnées (x, y) et $\vec{w}$ un vecteur du plan complexe de coordonnées (x', y').
  — On appelle **affixe du point** M le nombre complexe $z = x + iy$
  — On appelle **affixe du vecteur** $\vec{w}$ le nombre complexe $z' = x' + iy'$

Exemple 4.



— Le point M a pour affixe $-2-3i$;

— Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $3+5i$.

Proposition 9.

Soit A, B des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B.
— L'affixe du A et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont égales.
— Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

b. Propriétés des affixes

Proposition 10.

Soit $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ des vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$
- le vecteur $\lambda\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe λz_1

Proposition 11. *Affixe du milieu*

Soit A, B, I des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_I. Alors I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exercice 8.

Exercices 1 à 12 p42

Voir les exercices corrigés p33 et 14,15,16 p42

Exercice 9.

> **Remarque :**
> Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}$.
>
> — Le point $M(z)$ se trouve sur l'axe des abscisses si, et seulement si, z est un réel.
>
> — Le point $M(z)$ se trouve sur l'axe des ordonnées si, et seulement si, z est un imaginaire pur.

1. Soit A d'affixe $1 + i$ et B d'affixe $3 - i$.
   (a) Quel est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?
   (b) Montrer que l'axe des abscisses coupe le segment $[AB]$ en son milieu.
2. Soit A le point d'affixe $i(\sqrt{3} + i)^{12}$. Montrer que A se trouve sur l'axe des ordonnées.
3. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ des points du plan complexe tels que $z' = z^2$. Déterminer les points M tels que M' se situe sur l'axe des abscisses.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z' = i\frac{z^3\bar{z}^3}{z+\bar{z}+1}$. Montrer que le point A d'affixe z' se situe sur l'axe des ordonnées.

Correction.

1. Soit A d'affixe $1+i$ et B d'affixe $3-i$.
   (a) L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_b - z_A = (3-i)-(1+i) = 2-2i$.
   (b) Soit $I(z_I)$ le milieu de $[AB]$. Alors

   $$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}((3-i)+(1+i)) = 2 \in \mathbb{R}$$

   Par suite, le milieu de $[AB]$ se trouve sur l'axe des abscisses et comme deux droites se coupe en un unique point (si elle ne sont pas parallèles bien-sûr) ; on en déduit que l'axe des abscisses coupe le segment $[AB]$ en son milieu.
2. on remarque que $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3 i = 8i$. Donc :

   $$i(\sqrt{3}+i)^{12} = i((\sqrt{3}+i)^3)^4 = i(8i)^4 = 8^4 i$$

   Donc l'affixe de A est un imaginaire pur, d'où A est sur l'axe des ordonnées.
3. On met z sous sa forme algébrique $z = a+ib$. Alors $z' = a^2 - b^2 + 2iab$. Or M' est sur l'axe des abscisses si, et seulement si, $z' \in \mathbb{R}$ i.e. $2ab = \mathrm{Im}(z') = 0$ ce qui équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
   Par suite, M' est sur l'axe des abscisses si, et seulement si, z est réel ou imaginaire pur ce qui équivaut à M est sur l'axe des abscisses ou sur l'axe des ordonnées.
4. On a :

   $$\begin{array}{rcl} \overline{z'} & = & \overline{\left(i\frac{z^3\overline{z}^3}{z+\overline{z}+1}\right)} \\ & = & \overline{i}\frac{\overline{z^3}\overline{\overline{z}^3}}{\overline{z+\overline{z}+1}} \\ & = & -i\frac{\overline{z}^3 z^3}{\overline{z}+\overline{\overline{z}}+\overline{1}} \\ & = & -i\frac{\overline{z}^3 z^3}{\overline{z}+z+1} \\ \overline{z'} & = & -z' \end{array}$$

   Donc z' est un imaginaire pur. Ainsi, A d'affixe z' se situe sur l'axe des ordonnées.

2. Module d'un nombre complexe

a. Le module

Définition 6. *Module*

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a+ib$. On appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Exemple 5.

Le complexe $2+3i$ a pour module $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Proposition 12. *Interprétation géométrique*

Soit z, zA, z_B des nombres complexes.

— Soit $\vec{w}$ le vecteur du plan complexe d'affixe z. On a $\|\vec{w}\| = |z|$.

— Soit M le point du plan complexe d'affixe z. On a $OM = |z|$.

— Soit A, B les points d'affixes respectives z_A, z_B. On a $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$ et $\vec{w}$ un vecteur du plan complexe d'affixe z. Alors $\vec{w}$ est de coordonnées (a, b) dans le repère **orthonormé** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et donc $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Comme $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux, alors $a\vec{u}$ et $b\vec{v}$ le sont aussi ; donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

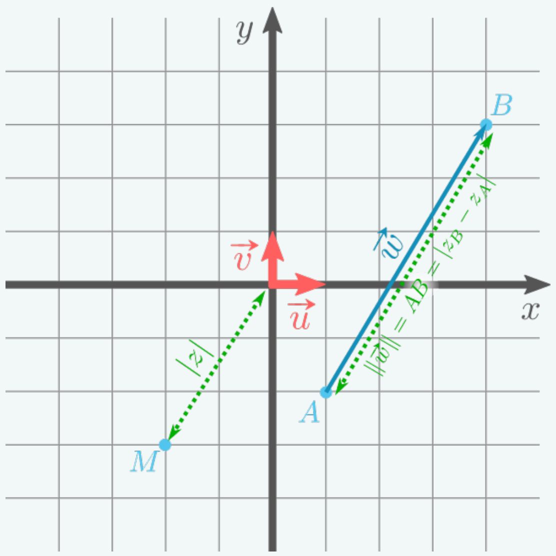
$$\|\vec{w}\|^2 = \|a\vec{u}\|^2 + \|b\vec{v}\|^2 = a^2 \underbrace{\|\vec{u}\|^2}_{=1} + b^2 \underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{=1} = a^2 + b^2.$$

Par suite,

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pour les deux autres affirmations, il suffit de remarquer que pour deux points M, M' du plan, $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\|$. □

Exemple 6.



— Le point M a pour module $|z| = \sqrt{13}$;

— Le vecteur $\vec{w}$ a pour module $\sqrt{34}$.

b. Propriétés du module

Proposition 13.

Soit z un nombre complexe. Alors :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \text{ et } |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|\,;\, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Démonstration.

— On considère la forme algébrique $z = a + ib$ de z. Par définition des parties réelle et imaginaire, $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$, donc, par définition du module :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

— On a, par croissance de la racine carrée :

$$|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|$$

et

$$|\operatorname{Im}(z)| = \sqrt{\operatorname{Im}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|$$

$\square$

Proposition 14.

Soit z un nombre complexe. Alors $z = 0$ si, et seulement si, $|z| = 0$.

Démonstration.

— $(\Leftarrow)$. On suppose $z = 0$. Alors $z = 0 + i0$, donc $|z| = sqrt0^2 + 0^2 = 0$.
— $(\Rightarrow)$. On suppose $|z| = 0$. On a, d'après la proposition précédente

$$0 \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z| = 0 \text{ et } 0 \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z| = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{im}(z) = 0$ et donc $z = 0$.

$\square$

Proposition 15. *Module et conjugaison*

Soit z un nombre complexe. On a :

$$|z|^2 = z\overline{z} \text{ et } |\overline{z}| = |z| = |-z|.$$

Démonstration.

— D'après la Proposition 8, on a :

$$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2.$$

— On considère la forme algébrique $a = a + ib$ de z. Alors

$$|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

et

$$|-z| = |-a - ib| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

□

c. Opérations et module

Proposition 16. *Produit/Quotient*

Soit z, z' des nombres complexes. On a :

- $|zz'| = |z|.|z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$

Démonstration.

- On a
$$|zz'| = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\,\overline{z'} = z\overline{z}.z'\overline{z'} = |z|.|z'|.$$
- On démontre, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|z^n| = |z|^n$.
  — **Initialisation :**
  Par convention, tout nombre complexe élevé à la puissance 0 vaut 1, d'où :
  $$|z^0| = |1| = 1 \text{ et } |z|^0 = 1$$
  donc $|z^0| = |z|^0$
  Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
  — **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $|z^n| = |z|^n$. Montrons que $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$
  On a :
  $$\begin{array}{rcl} |z^{n+1}| & = & |zz^n| \\ & = & |z|.|z^n| \text{ d'après le point précédent} \\ & = & |z|.|z|^n \text{ par H.R.} \\ |z^{n+1}| & = & |z|^{n+1} \end{array}$$
  Ce qui achève le raisonnement par récurrence.
  Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- On suppose $z \neq 0$. On a, d'après le premier point :
$$\left|\frac{1}{z}\right|.|z| = \left|\frac{1}{z}.z\right| = |1| = 1$$

Donc, $\left|\frac{1}{z}\right|$ est l'inverse de $|z|$; ainsi, par unicité de l'inverse :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

- On suppose $z' \neq 0$. On a, d'après le premier point et le point précédent :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'}.z\right| = \left|\frac{1}{z'}\right|.|z| = \frac{1}{|z'|}.|z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

$\square$

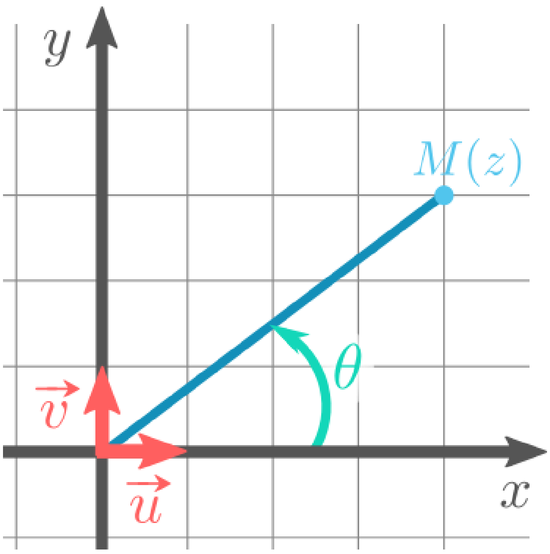
d. Exercices

Exercice 10.

Exercices 17 à 22 p42

Voir exercices corrigés p35 et 65 p46

3. Argument d'un nombre complexe



Définition 7. *Argument d'un nombre complexe*

Soit z un nombre complexe **non nul** et M le point du plan complexe d'affixe z.
On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ une *mesure (en radian) de l'angle orienté* $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque 2.

Un nombre complexe non nul z possède une infinité d'arguments qui sont tous égaux "à $2k\pi$" près. Ainsi, si θ est un argument de z, on note :

$$\arg(z) = \theta\ [2\pi] \text{ ou } \arg(z) = \theta \bmod 2\pi$$

De plus, il existe un unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$. Cet argument est appelé **argument principal** de z.

Exemple 7.

- 5 a pour argument $0\ [2\pi]$ et 0 pour argument principal ;
- $-i$ a pour argument $\frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$ et $-\frac{\pi}{2}$ pour argument principal ;
- $1+i$ a pour argument $\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice 11.

En s'appuyant sur le plan complexe, donner un argument et l'argument principal des nombres complexes suivants : $\frac{i}{2}$; -5 et $-2-2i$

Correction.

- $\arg\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$; et c'est l'argument principal
- $\arg(-5) = \pi\ [2\pi]$; et c'est l'argument principal
- $\arg(-2-2i) = \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ et l'argument principal est $-\frac{3\pi}{4}$

Proposition 17.

Soit z un complexe non nul. On a :

- $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ si, et seulement si, z est un réel strictement positif ;
- $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$ si, et seulement si, z est un réel strictement négatif ;
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ si, et seulement si, z est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z)$ strictement positif ;
- $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ si, et seulement si, z est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z)$ strictement négatif.

Démonstration.

Soit M le point d'affixe z. On obtient les résultats de la proposition en comparant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (qui ont pour affixe respectives 1 et i). $\square$

Exercice 12.

Soit z, z' des nombres complexes. En s'appuyant sur le plan complexe, conjecturer un argument de $-z$ et de $\overline{z}$.

Correction.

On peut conjecturer :
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

Exercice 13.

Exercices 40 à 46 p44

Correction.

40 p44 On trouve l'argument par lecture graphique en déterminant l'angle entre la demi-droite des abscisses positives et la demi-droite issue de O et passant par le point.

Réponses :
$\arg(z_A) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $\arg(z_B) = \pi\ [2\pi]$; $\arg(z_C) = 0\ [2\pi]$; $\arg(z_D) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; $\arg(z_E) = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; $\arg(z_F) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

41 p44 Corrigé dans le livre

42 p44 Si θ est un argument de $z = x + iy \neq 0$, alors, par définition du cosinus, on a $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$. On peut donc déterminer θ à l'aide de la fonction arccos (souvent écrite $\cos^{-1}$ sur les calculatrices).
Mais attention, arccos donne un résultat dans $[0, \pi]$: elle ne donne donc le bon résultat que dans le cas où le sinus est positif, ce qui revient ici à $y \geq 0$. Si l'angle appartient à l'intervalle $]-\pi, 0[$ (ce qui revient à $y < 0$), il faudra ajouter un signe $-$ au résultat de la fonction arccos (faire un dessin pour s'en convaincre).

Résultats :
- Si θ_1 est un argument de $z_1 = x + iy = -4 + 3i$ qui est de module 5, on a $\cos(\theta_1) = \frac{-4}{5}$ et $y = 3 \geq 0$ donc la fonction arccos fournit le bon résultat, à savoir :
$$\theta_1 \simeq 2,498\ [2\pi].$$
- Si θ_2 est un argument de $z_2 = x + iy = \sqrt{2} + i(-\sqrt{3})$ qui est de module $\sqrt{5}$, on a $\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ et $y = -\sqrt{3} < 0$ donc il faut multiplier par -1 le résultat de la fonction arccos pour avoir le bon résultat, à savoir :
$$\theta_2 \simeq -0,886\ [2\pi].$$

43 p44 On utilise la définition de l'argument : $\arg(z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$. Par lecture graphique, après avoir placer le point A d'affixe $z_A = -5 + 5i$, on trouve :

$$\arg(z_A) = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi].$$

44 p44 L'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ est égal à l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OC})$ où C est le point dont l'affixe est égale à celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$: en effet, dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux. On a donc :

$$z_C = z_B - z_A = 2 + 5i - (5 + 2i) = -3 + 3i.$$

Puis en plaçant le point C et par lecture graphique, on obtient :

$$\arg(z_C) = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi].$$

Ainsi, par définition de l'argument, une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ est $\frac{3\pi}{4}$.

45 p44 Considérons le point A et son affixe $z_A = x + iy$ sous forme algébrique. Par lecture graphique, on voit que $x = 1$, $y > 0$ et $|z_A| = 2$. Comme $x^2 + y^2 = |z_A|^2 = 4$, on obtient $y = \sqrt{3}$.
Donc $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

Pour les autres points, on peut faire un raisonnement similaire pour trouver leurs formes algébriques. Mais essayons de rester dans l'esprit du paragraphe où se trouve l'exercice : l'utilisation de l'argument. Pour cela, on détermine une mesure l'angle bleu sur le graphique i.e. un argument de z_A.
Soit θ un argument de z_A. Par définition des cosinus et sinus, on a $\cos(\theta) = \frac{x}{|z_A|} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{|z_A|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On reconnait donc $\arg(z_A) = \theta = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

— D'après le graphique, l'argument de $z_C = x_C + iy_C$ est égal à $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$ et son module est 2 donc, par définition des cosinus et sinus,

$$x_C = 2\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} \text{ et } y_C = 2\sin(\frac{5\pi}{6}) = 1$$

et donc C est d'affixe $-\sqrt{3} + i$.

— D'après le graphique, l'argument de $z_B = x_B + iy_B$ est égal à $\frac{5\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ et son module est 4 donc, par définition des cosinus et sinus,

$$x_B = 4\cos(-\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} \text{ et } y_B = 4\sin(-\frac{\pi}{6}) = -2$$

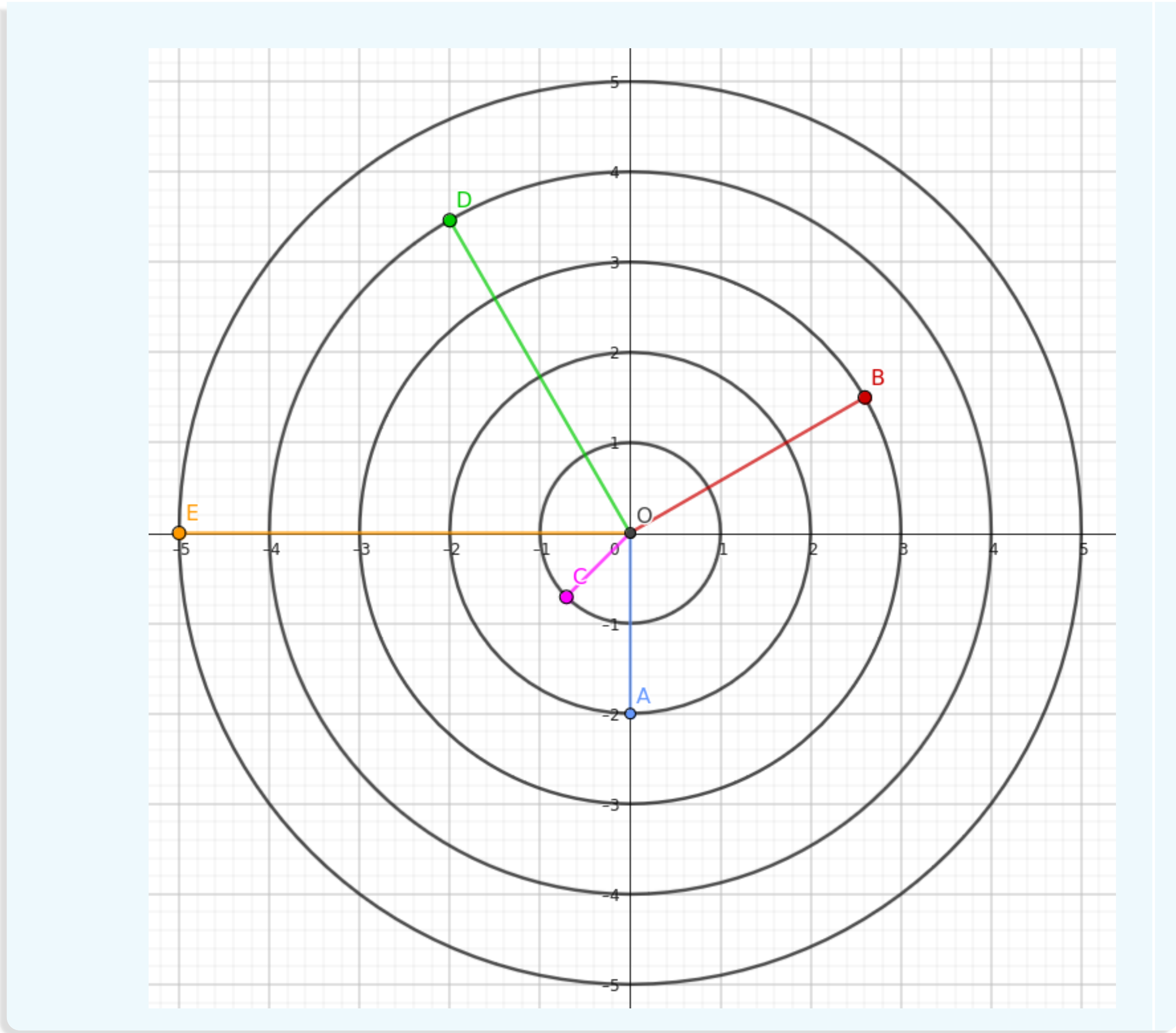
et donc B est d'affixe $2\sqrt{3} - 2i$.

— D'après le graphique, l'argument de $z_D = x_D + iy_D$ est égal à $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ $[2\pi]$ et son module est 4 donc, par définition des cosinus et sinus,

$$x_D = 4\cos(\frac{4\pi}{3}) = -2 \text{ et } y_D = 4\sin(\frac{4\pi}{3}) = -2\sqrt{3}$$

et donc D est d'affixe $-2 - 2i\sqrt{3}$.

46 p44



D
B
E
O
C
A

Partie C

Nombres complexes et trigonométrie

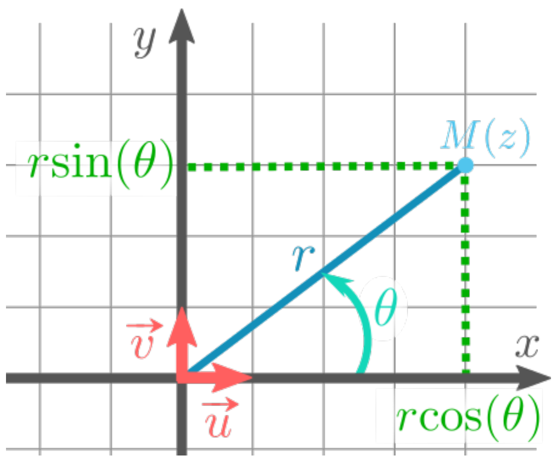
1. Forme trigonométrique

Définition-Proposition 8.

Soit z un nombre complexe non nul. Alors pour $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$, on a :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Cette écriture du nombre complexe z est appelée **forme trigonométrique** de z.



Démonstration.

Soit z un nombre complexe non nul. On considère sa forme algébrique $z = a + ib$ et M, N les points du plan complexe d'affixes respectives z et a. Alors le triangle MNO est rectangle en N : en effet, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{NM} & = & \frac{1}{2}((-a)(\overline{z-a}) + (\overline{-a})(z-a)) \\
 & = & \frac{1}{2}(-a(\overline{z-a}) + (-a)(z-a)) \\
 & = & -\frac{a}{2}((z-a) + \overline{z-a}) \\
 & = & -\frac{a}{2}(2\mathrm{Re}(z-a)) = -a(a-a) \\
\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{NM} & = & 0
\end{array}$$

Par suite, on a, d'après la définition géométrique du cosinus et du sinus de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ de mesure θ,

$$\cos(\theta) = \frac{ON}{OM} = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{NM}{OM} = \frac{b}{r}$$

Et ainsi,

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}) = a + ib = z.$$

$\square$

Exemple 8.

- $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$.
- $2i = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$.
- $4 = 4(\cos(0) + i\sin(0))$.

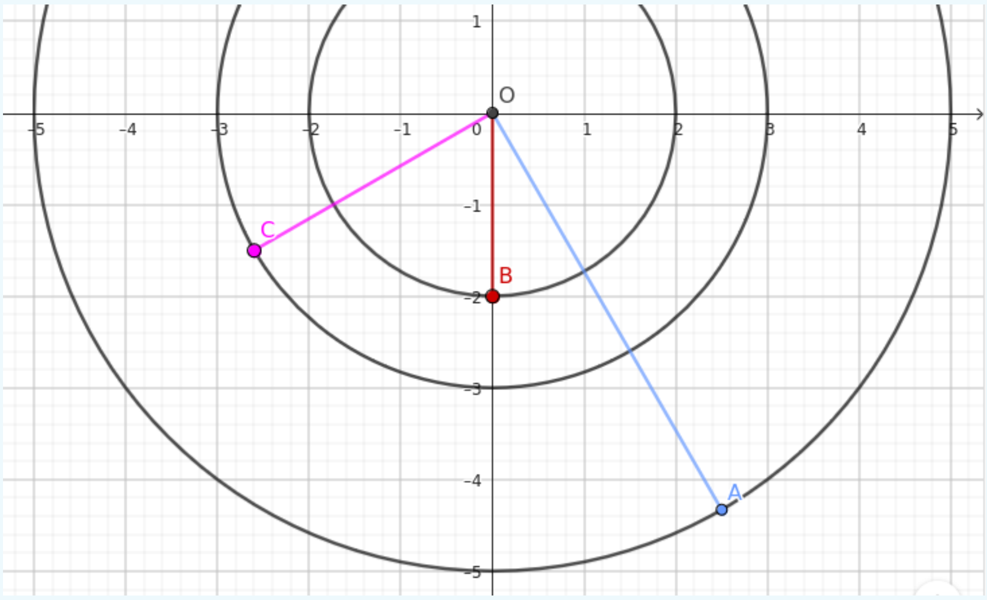
Exercice 14.

Exercices 56,57,59 p45

Correction.

56 p45 Corrigé dans le livre.

57 p45



59 p45 **A :** Le graphique est sûrement faux, le point A devrait plutôt être à l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et du cercle de centre O et de rayon 1. Dans ce cas, on a :

$$|z_A| = 1 \text{ et } \arg(z_A) = -\frac{3\pi}{4} \ [2\pi],$$

d'où $z_A = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

B : B est sur le cercle de centre O et de rayon 4 ; son abscisse x est égale à -2 et son ordonnée y est négative.

On en déduit, en notant θ un argument de z_B :

$$|z_B| = 4 \text{ et } \cos(\theta) = \frac{x}{|z_B|} = -\frac{1}{2},$$

Comme $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$, on a, d'après la formule fondamentale des cosinus et sinus :

$$|\sin(\theta)| = \sqrt{\sin^2(\theta)} = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\sin(\theta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or $\sin(\theta)$ est du même signe que y (l'ordonnée de B) qui est négative donc :

$$|z_B| = 4,\ \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d'où $z_B = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

C : C est sur le cercle de centre O et de rayon 4 ; son abscisse x est positive et son ordonnée y est égale à 2.
On en déduit, en notant θ un argument de z_C :

$$|z_C| = 4 \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{|z_C|} = \frac{1}{2},$$

Comme $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, on a, d'après la formule fondamentale des cosinus et sinus :

$$|\cos(\theta)| = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\cos(\theta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or $\cos(\theta)$ est du même signe que x (l'abscisse de C) qui est positive donc :

$$|z_C| = 4,\ \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2}.$$

d'où $z_C = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

D : Le point D est d'affixe $z_D = 3i$ et $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, d'où :

$$z_D = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

E : Le point E est à l'intersection de la droite d'équation $y = -x$ et du cercle de centre O et de rayon 3. Ainsi :

$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi],$$

d'où $z_E = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

F : Le point F est à l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et du cercle de centre O et de rayon 4. Ainsi :

$$|z_F| = 4 \text{ et } \arg(z_F) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi],$$

d'où $z_F = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercices résolus p37

Proposition 18.

Soit z, z' des complexes non nuls. Alors $z = z'$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration.

Soit z, z' des complexes non nuls de formes trigonométriques.
Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]$.
Réciproquement, si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]$, alors z et z' ont la même forme trigonométrique et donc son égaux. $\square$

2. Propriétés trigonométriques

Proposition 19. *Rappel de l'identité fondamentale*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Proposition 20. *Formules d'addition*

Soit a, b des réels. On a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit A, B les points d'affixes respectives $z_A = \cos(a) + i\sin(a)$ et $z_B = \cos(b) + i\sin(b)$. Alors $OA = |z_A| = 1 = |z_B| = OB$, $\arg(z_A) = a\ [2\pi]$ et $\arg(z_B) = b\ [2\pi]$.
Ainsi, on a $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = a\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = b\ [2\pi]$; or, par la relation des angles orientés :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = a - b\ [2\pi]$$

et donc,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB.OA.\cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = OB.OA.\cos(a-b) = \cos(a-b).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2}(z_B\overline{z_A}+\overline{z_B}z_A)\\
&= \mathrm{Re}(z_B\overline{z_A})\\
&= \mathrm{Re}((\cos(b)+i\sin(b))(\cos(a)-i\sin(a)))\\
&= \mathrm{Re}((\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a))+i(\sin(b)\cos(a)-\cos(b)\sin(a)))\\
\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} &= \cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\cos(a-b)=\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)$.

Pour les autres formules, on utilise les propriétés suivantes :
- $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))$ et la parité de cos ;
- $\sin(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ - on prouve ces relations en remarquant que les points d'affixe $z_1=\cos(x)+i\sin(x)$ et $z_2=\cos(\frac{\pi}{2}-x)+i\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathrm{Im}((1+i)z)=0$ (en coordonnées cartésiennes, il s'agit de la droite d'équation $y=x$!).

□

Exercice 15.

1. Déterminer les cosinus et sinus de $\frac{7\pi}{12}$ et de $\frac{\pi}{12}$
2. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos'(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ et $\sin'(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$.

Correction.

1. On a $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, donc, d'après les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\\
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Et également,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\\
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4}
\end{aligned}$$

On aurait également pu utiliser le fait que $\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $\cos'(x)=-\sin(x)$ et $\sin'(x)=\cos(x)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Donc $\cos'(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ et $\sin'(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$.

Les formules suivantes sont à savoir mais aussi à savoir retrouver à partir des précédentes !

Proposition 21. *Formules de linéarisation*

Soit θ un réel. On a :

$$\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1 \text{ et } \sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Démonstration.

— On remarque tout d'abord que, d'après l'identité fondamentale, $\sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)$.

Ainsi, d'après les formules d'addition :

$$\begin{array}{rcl} \cos(2\theta) & = & \cos(\theta+\theta) \\ & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ & = & \cos^2(\theta) - \left(1 - \cos^2(\theta)\right) \\ \cos(2\theta) & = & 2\cos^2(\theta) - 1 \end{array}$$

— On a, d'après les formules d'addition :

$$\begin{array}{rcl} \sin(2\theta) & = & \sin(\theta+\theta) \\ & = & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{array}$$

□

Voir les exercices résolus p55 et 1,2,3,6,9,10,12,13 p64

3. Propriétés de l'argument

Proposition 22.

Soit z, z' des complexes non nuls et n un entier naturel.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

4. Exercices

Exercice 16.

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module 4 et d'argument principal $\frac{2\pi}{3}$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $z = -5 - 5i\sqrt{3}$.
3. Déterminer l'argument de $z = (1+i)^{12}$

Correction.

1. Connaissant le module r et un argument θ d'un nombre complexe z, on obtient sa forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Ainsi :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\tfrac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

2. Pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, on factorise z par son module puis on reconnait, si elles sont connues bien-sûr, les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Ici, on a :

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+75} = \sqrt{100} = 10.$$

Donc
$$z = 10\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 10\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$$

3. On utilise la formule $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$ pour $z = 1+i$ et $n = 12$. On commence par déterminer un argument de z en le mettant sous forme algébrique (même méthode que la question précédente) :

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

d'où $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Ainsi, on a :

$$\arg((1+i)^{12}) = \arg(z^{12}) = 12\arg(z) = 12\frac{\pi}{4} = 3\pi = \pi\ [2\pi]$$

Supplément : on en déduit que z est un nombre réel négatif, et comme $|z^{12}| = |z|^{12} = \sqrt{2}^{12} = 2^6 = 64$, on a donc $z = -64$.

Exercice 17.

Exercices 47 à 50p44 ; 66p46 et 80p47

Correction.

47 p44 Réponses :
$\arg(z_1) = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$; $\arg(z_2) = \pi\ [2\pi]$; $\arg(z_3) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; $\arg(z_4) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

48 p44 Réponses :
$z_1 = 3i$; $z_2 = -2$; $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $z_5 = -2\sqrt{3} - 2i$.

49 p44 1. On a $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ d'où :

$$z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

d'où $|z_1| = 4$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On a $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ d'où :

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

d'où $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

2. (a) On a :

$$|a| = |iz_1| = |i|.|z_1| = 1 \times 4 = 4$$

et

$$\begin{aligned}\arg(iz_1) &= \arg(i) + \arg(z_1)\ [2\pi]\\ &= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ \arg(iz_1) &= \tfrac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{aligned}$$

(b) On a :

$$|b| = |z_1z_2| = |z_1|.|z_2| = 4\sqrt{2}.$$

et

$$\begin{aligned}\arg(z_1z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]\\ &= -\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\ \arg(z_1z_2) &= \tfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]\end{aligned}$$

(c) On a :

$$|c| = |z_2^2| = |z_2|^2 = 2.$$

et

$$\begin{aligned}\arg(z_2^2) &= 2\arg(z_2)\ [2\pi]\\ &= 2 \times \tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\ \arg(z_2^2) &= \tfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]\end{aligned}$$

(d) On a :

$$|d| = \left|-\frac{2}{z_1}\right| = |-1|.\frac{|2|}{|z_1|} = 1 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

et

$$\begin{aligned}\arg\left(-\frac{2}{z_1}\right) &= \arg\left(\tfrac{2}{z_1}\right) + \pi\ [2\pi]\\ &= \arg(2) - \arg(z_1) + \pi\ [2\pi]\\ &= 0 - \left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + \pi\ [2\pi]\\ \arg\left(-\frac{2}{z_1}\right) &= \tfrac{7\pi}{6}\ [2\pi]\end{aligned}$$

(e) On a :

$$|e| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

et

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1)-\arg(z_2)\ [2\pi]\\ &= -\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= -\tfrac{11\pi}{12}\ [2\pi]\end{aligned}$$

(f) On a :

$$|f| = \left|\frac{z_1^6}{z_2^4}\right| = \frac{|z_1|^6}{|z_2|^4} = \frac{4^6}{\sqrt{2}^4} = 1024.$$

et

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1^6}{z_2^4}\right) &= 6\arg(z_1)-4\arg(z_2)\ [2\pi]\\ &= -6\tfrac{\pi}{6}-4\tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\ \arg\left(\frac{z_1^6}{z_2^4}\right) &= -2\pi = 0\ [2\pi]\end{aligned}$$

50 p44 Les calculs des arguments des nombres complexes sous formes algébriques sont laissés au lecteur.

— On a :

$$\begin{aligned}\arg(z_1) &= \arg\left(\tfrac{5i}{1+i}\right)\\ &= \arg(5i)-\arg(1+i)\ [2\pi]\\ &= \tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\\ \arg(z_1) &= \tfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{aligned}$$

— On a :

$$\begin{aligned}\arg(z_2) &= \arg\left((1-i)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)\right)\\ &= \arg(1-i)+\arg\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)\ [2\pi]\\ &= -\tfrac{\pi}{4}+\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\ [2\pi]\\ \arg(z_2) &= -\tfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]\end{aligned}$$

— On a :

$$\begin{aligned}\arg(z_3) &= \arg\left(\tfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)\\ &= \arg(1-i\sqrt{3})-\arg(1-i)\ [2\pi]\\ &= -\tfrac{\pi}{3}-\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]\\ \arg(z_3) &= -\tfrac{\pi}{12}\ [2\pi]\end{aligned}$$

— On a :

$$\begin{aligned}
\arg(z_4) &= \arg\left((1-i)^{2020}\right) \\
&= 2020\arg(5i)\ [2\pi] \\
&= 2020 \times \left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\ [2\pi] \\
&= -505\pi\ [2\pi] \\
&= (1-506)\pi = \pi - 253 \times 2\pi\ [2\pi] \\
\arg(z_4) &= \pi\ [2\pi]
\end{aligned}$$

66 p46 1.

A : On a :

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

puis, on factorise z_A par son module :

$$z_A = 2\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\sin(\theta)}\right);$$

d'où on déduit :

$$z_A = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ainsi, $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

B : On a :

$$|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

puis, on factorise z_B par son module :

$$z_B = 2\sqrt{3}\left(\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sin(\theta)}\right);$$

d'où on déduit :

$$z_B = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Ainsi, $|z_B| = 2\sqrt{3}$ et $\arg(z_B) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

G : On utilise cette fois les propriétés du module et de l'argument. On a pour le module :

$$\begin{aligned}
|z_G| &= \left|\tfrac{4z_B}{3\sqrt{3}z_A}\right| \\
&= \tfrac{|4|.|z_B|}{|3\sqrt{3}|.|z_A|} \\
&= \tfrac{4\times 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times 2} \\
|z_G| &= \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Puis pour l'argument :

$$\begin{array}{rcl}
\arg(z_G) & = & \arg\left(\frac{4z_B}{3\sqrt{3}z_A}\right) \\
 & = & \arg(4z_B) - \arg(3\sqrt{3}z_A)\ [2\pi] \\
 & = & \arg(4) + \arg(z_B) - \left(\arg(3\sqrt{3}) + \arg(z_A)\right)\ [2\pi] \\
 & = & 0 + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \left(0 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\ [2\pi] \\
\arg(z_G) & = & 0 + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \left(0 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\ [2\pi] \\
\arg(z_G) & = & -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]
\end{array}$$

2. On va déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Par la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \vec{u}) + (\vec{u}\overrightarrow{OB}) = (\vec{u}\overrightarrow{OB}) - (\vec{u}\overrightarrow{OA}).$$

Or, d'après la définition de l'argument, $\arg(z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}\overrightarrow{OA})$ et $\arg(z_B)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}\overrightarrow{OB})$ donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est donné par :

$$\arg(z_B) - \arg(z_A) = -\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Par suite, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est droit et donc le triangle AOB est rectangle en O.

3. L'affixe z_K du milieu de $[AB]$ est donné par :

$$z_K = \frac{z_A + z_B}{2} = -2i$$

De plus, O, K et G sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires.
Or $z_{\overrightarrow{OK}} = z_K = 2i$ et d'après la question 1.

$$z_{\overrightarrow{OG}} = z_G = \frac{4}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{4}{3}i;$$

d'où $z_{\overrightarrow{OG}} = -\frac{2}{3}z_{\overrightarrow{OK}}$ et ainsi $\overrightarrow{OG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.
Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires et donc les points O, K et G sont alignés.

80 p47 1. La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul est de la forme $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ avec r **strictement positif** et **le même** θ dans le cosinus et le sinus.

Ici, on a l'impression que tout va bien avec $r = 1$ mais il y a un moins à la place d'un plus **donc z_1 n'est pas sous forme algébrique**.
On va donc jouer sur les propriétés de parité de cos et sin pour s'en sortir :
- la fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\cos(x) = \cos(-x)$;
- la fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $\sin(x) = -\sin(-x)$;

Par suite, on a :

$$\begin{array}{rcl}
z_1 & = & \cos(x) - i\sin(x) \\
 & = & \cos(-x) - i(-\sin(-x)) \\
z_1 & = & 1(\cos(-x) + i\sin(-x));
\end{array}$$

cette dernière forme de z_1 est donc sa forme trigonométrique.
Ainsi, $|z_1| = 1$ et $\arg(z_1) = -x\ [2\pi]$.

2. On a, pour le module :

$$\begin{array}{rcl} |z_2| & = & \left|(1-i)^{2019}\right| \\ & = & |1-i|^{2019} \\ & = & \left(\sqrt{2}\right)^{2019} \\ |z_2| & = & 2^{1009}\sqrt{2}. \end{array}$$

et pour l'argument :

$$\begin{array}{rcl} \arg(z_2) & = & \arg\left((1-i)^{2019}\right) \\ & = & 2019\arg(1-i)\ [2\pi] \\ & = & (2016+3)\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi] \\ & = & 504\pi + \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\ & = & \frac{3\pi}{4} - 252\times 2\pi\ [2\pi] \\ \arg(z_2) & = & \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]. \end{array}$$

3. On a, pour le module :

$$\begin{array}{rcl} |z_3| & = & \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n\right| \\ & = & \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|^n \\ |z_3| & = & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n. \end{array}$$

et pour l'argument :

$$\begin{array}{rcl} \arg(z_3) & = & \arg\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n\right) \\ & = & n\arg\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\ [2\pi] \\ \arg(z_2) & = & \frac{n\pi}{6}\ [2\pi]. \end{array}$$

Exercices corrigés p37 ; 56,60,61 p45