Correction de l'interrogation n°1

1. Questions de cours

Exercice 1.

1. Compléter la définition suivante :

> Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
> Le réel a est appelé la partie .... de z.
> Le réel b est appelé la partie .... de z.

2. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer la forme algébrique de z^2.

Correction.

1.

> Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
> Le réel a est appelé la partie **réel** de z.
> Le réel b est appelé la partie **imaginaire** de z.

2. $$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + i2ab - b^2 = (a^2 - b^2) + i2ab.$$

2. Vrai - Faux

Exercice 2.

Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse **en justifiant** votre réponse :

1. $(1+i)$ est solution de $z^2 + z(1-i) - 2 - 2i = 0$.
2. Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = (1+i)z$. Alors on a :
$$z' = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1).$$
3. Pour tout nombre complexe z, on a : $\text{Re}(z^2) = (\text{Re}(z))^2$.
4. $\text{Re}((1+i)^4) = 4\text{Re}(1+i)$.
5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $Z = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$ est un imaginaire pur.

Correction.

1. **VRAI**.
   Pour savoir si $(1+i)$ est solution de $z^2+z(1-i)-2-2i=0$ ou non ; on calcule $z^2+z(1-i)-2-2i$ en remplaçant z par $(1+i)$:
   $$(1+i)^2+(1+i)(1-i)-2-2i=2i+2-2-2i=0$$
   Ainsi, $(1+i)$ est solution de $z^2+z(1-i)-2-2i=0$.
2. **VRAI**.
   On a $z=\sqrt{3}-i$ et $z'=(1+i)z$, donc :
   $$z'=(1+i)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-\underbrace{i^2}_{=-1}=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1);$$
   ce qui correspond bien au z' annoncé.
3. **FAUX**.
   On cherche un contre-exemple à l'affirmation ; $z=i$ convient :
   — d'une part, $\mathrm{Re}(z^2)=\mathrm{Re}(i^2)=\mathrm{Re}(-1)=-1$
   — d'autre part, $\mathrm{Re}(z)^2=\mathrm{Re}(i)^2=0^2=0$
   Donc $\mathrm{Re}(z^2)\neq\mathrm{Re}(z)^2$ en général.
4. **FAUX**.
   On a $(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4$.
   Par suite,
   — $\mathrm{Re}((1+i)^4)=-4$
   — $4\mathrm{Re}((1+i))=4\times 1=4$.
   Ainsi, $\mathrm{Re}((1+i)^4)\neq 4\mathrm{Re}((1+i))$
5. **VRAI**.
   Soit $z\in\mathbb{C}$. On sait Z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{Z}=-Z$. Or on a :
   $$\begin{aligned}\overline{Z}&=\overline{\left(\frac{z^2-\overline{z}^2}{z\overline{z}+3}\right)}\\&=\frac{\overline{z^2-\overline{z}^2}}{\overline{z\overline{z}+3}}\\&=\frac{\overline{z^2}-\overline{\overline{z}^2}}{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}+\overline{3}}\\&=\frac{\overline{z}^2-\overline{\overline{z}}^2}{\overline{z}z+3}\\&=\frac{\overline{z}^2-z^2}{z\overline{z}+3}\\&=-\frac{z^2-\overline{z}^2}{z\overline{z}+3}\\\overline{Z}&=-Z\end{aligned}$$
   Donc Z est bien un imaginaire pur.

3. Exercices

Exercice 3.

1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ pour :
   (a) $z = 2 - 3i$
   (b) $z = \dfrac{1-i}{4+5i}$
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en explicitant les solutions (si elles existent) sous **forme algébrique** :
   (a) $(3+i)z = 4z + 2i$
   (b) $3iz + 2(\overline{z} + i) = -8$
3. (a) Déterminer la forme algébrique de $(1+i)^{12}$.
   (b) Déterminer le(s) réel(s) a tel que $(a+i)^3$ est un nombre réel.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $z = (x^2 + 4x + 3) + ix$ et $z' = 8x + i(x^2 + x - 1)$.
   (a) Déterminer, si elle(s) existe(nt), la(les) valeur(s) de x tel que z est un imaginaire pur. Que vaut z dans ce(s) cas ?
   (b) Déterminer, si elle(s) existe(nt), la(les) valeur(s) de x tel que $z = z'$. Que vaut z dans ce(s) cas ?

Correction.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ pour :
   (a) $\frac{1}{z} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$
   (b) $\frac{1}{z} = \frac{-1}{2} + \frac{9}{2}i$.
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en explicitant les solutions (si elles existent) sous **forme algébrique** :
   (a) $1 - i$
   (b) $2 + 4i$
3. (a) On a $(1+i)^2 = 2i$ donc
   $$(1+i)^{12} = \left((1+i)^2\right)^6 = (2i)^6 = 2^6 i^6 = -64.$$
   (b) On a $(a+i)^3 = a^3 + 3a^2 i - 3a - i = a^3 - 3a + i(3a^2 - 1)$, donc $(a+i)^3$ est un réel si, et seulement si, $3a^2 - 1 = 0$ ce qui équivaut à :
   $$a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
4. (a) z est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle c'est-à-dire $x^2+4x+3 = 0$.

Or $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, donc :
z est imaginaire pur si, et seulement si, $x = -1$ et $x = -3$.
Pour $x = -1$, $z = -i$ et pour $x = -3$, $z = -3i$.

(b) $z = z'$ si, et seulement si, leurs parties réelles sont égales c'est-à-dire $x^2 + 4x + 3 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$ **et** leur parties imaginaires sont égales c'est-à-dire $x = x^2 + x - 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 0$.
Or $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc :
$z = z'$ est imaginaire pur si, et seulement si, ($x = 1$ et $x = 3$) et ($x = 1$ ou $x = -1$).
Et donc, $z = z'$ si, et seulement si, $x = 1$.
Pour $x = 1$, $z = 8 + i = z'$.