# Correction de l'interrogation n°2

## 1. Exercice 1

Correction.

**Partie 1**

- **Affirmation 1 :** On a :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ c &= \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

  donc cette affirmation est **FAUSSE**.

- **Affirmation 2 :** Comme $c$ est donné sous forme trigonométrique, on a $|c| = \frac{1}{2}$ et $\arg(c) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\arg(c^{3n}) = 3n \times \arg(c) = n\pi = 0 \text{ ou } \pi\ [2\pi].$$

  Ainsi, $c^{3n}$ est un réel ; donc cette affirmation est **VRAIE**.
  *Remarque : on pouvait également calculer $c^3$ qui vaut $-\frac{1}{8}$ puis conclure en remarquant que* $c^{3n} = \left(c^3\right)^n = \left(-\dfrac{1}{8}\right)^n \in \mathbb{R}$.

- **Affirmation 3 :** Les points $O$, $S$ et $T$ sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires.
  Or $z_{\overrightarrow{OS}} = z_S = c^2$ et $z_{\overrightarrow{OT}} = z_T = \frac{1}{c}$, donc

$$\frac{z_{\overrightarrow{OS}}}{z_{\overrightarrow{OT}}} = c^3.$$

  De plus, d'après la question précédente, $c^3$ est un réel (on pouvait également le calculer directement car $|c^3| = |c|^3 = \frac{1}{8}$ et $\arg(c^3) = 3 \times \arg(c) = \pi\ [2\pi]$ d'où $c^3 = -\frac{1}{8}$). Ainsi, il existe un réel $k$ (ici $k = c^3 \in \mathbb{R}$) tel que :

$$z_{\overrightarrow{OS}} = k\ z_{\overrightarrow{OT}}$$

  d'où $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OT}$ i.e. $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires.
  Il en résulte que les points $O$, $S$ et $T$ sont alignés ; cette affirmation est donc **VRAIE**.
  *On aurait également pu calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT})$ car les points $O$, $S$ et $T$ sont alignés si, et seulement si, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT})$ est $0$ ou $\pi$ modulo $2\pi$ (ici, on trouve $\pi$).*

- **Affirmation 4 :** On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|c^n| = |c|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

donc la suite $(|c^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$.
Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$|c| + |c^2| + \ldots + |c^n| = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette affirmation est donc **VRAIE**.

**Partie 2**

- **Affirmation 5 :** On note $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $|z| = 1$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Par suite, on a :

$$|z^6| = |z|^6 = 1^6 = 1$$

et :

$$\arg(z^6) = 6 \times \arg(z) = 6\frac{\pi}{3} = 2\pi = 0\ [2\pi].$$

D'où $z^6 = 1 \times (\cos(0) + i\sin(0)) = 1$.

Or $2019 = 6 \times 336 + 3$ donc :

$$z^{2019} = \left(z^6\right)^{336} \times z^3 = 1^{336} \times z^3 = z^3$$

Or $|z^3| = |z|^3 = 1$ et $\arg(z^3) = 3 \times \arg(z) = 3\frac{\pi}{3} = \pi\ [2\pi]$,
d'où $z^3 = 1 \times (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$.

Il en résulte que $z^{2019} = -1$ ; donc cette affirmation est **FAUSSE**.

*Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en calculant directement l'argument de $z^{2019}$ qui vaut $\pi\ [2\pi]$ ; comme celui-ci est différent, modulo $2\pi$, de l'argument de $1$ (qui vaut $0\ [2\pi]$), ces deux nombres ne peuvent être égaux.*

- **Affirmation 6 :** On a :

$$|z| = \frac{1}{6}|2+5i| = \frac{1}{6}\sqrt{4+25} = \frac{\sqrt{29}}{6}.$$

On remarque que $29 < 36$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{29} < 6$ d'où $0 < \frac{\sqrt{29}}{6} < 1$.

Ainsi, la suite géométrique $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de raison $\frac{\sqrt{29}}{6}$ qui est compris strictement entre $-1$ et $1$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = 0$.

Cette affirmation est donc **VRAIE**.

- **Affirmation 7 :** Comme $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on a :

$$\frac{7}{25} = \cos(2a) = \underbrace{\cos^2(a)}_{1-\sin^2(a)} - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

Ainsi,
$$\sin^2(a) = \frac{1-\frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25}.$$
d'où, en appliquant la fonction racine carrée à cette égalité :
$$|\sin(a)| = \frac{3}{5} \text{ et donc : } \sin(a) = \pm\frac{3}{5}.$$
Or $a$ appartient à $]-\pi, 0[$ (ce n'est ni 0 ni $-\pi$ car la valeur de $\cos(2a)$ ne correspond pas) et la fonction sin est strictement négative sur cet intervalle, donc :
$$\sin(a) = -\frac{3}{5}.$$
Il en résulte que cette affirmation est **VRAIE**.

- **Affirmation 8 :** On a $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Par suite, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

  Ainsi, on a, en remarquant que $2023 = 8 \times 253 - 1$ :
$$\arg(z^{2023}) = 2023 \times \arg(z) = \underbrace{2023\frac{\pi}{4}}_{=253\times 2\pi - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} \neq 0\ [2\pi].$$
  donc cette affirmation est **FAUSSE**.

  *Remarque : on aurait également pu faire un calcul direct de $z^{2023}$ ; en effet, on remarque que $z^4 = -64$ et donc $z^{2023} = z^{4\times 505+3} = (-64)^{505}z^3 = -64^{505}(-16+16i)$ qui n'est pas un réel donc l'argument de $z^{2023}$ ne peut pas être 0 modulo $2\pi$.*

## 2. Exercice 2

Correction.

1. (a) On a $(-2i)^2 = -4$ et $(-2i)^3 = 8i$ d'où :
$$\begin{aligned} & (-2i)^3 + \left(-2\sqrt{3}+2i\right) \times (-2i)^2 + \left(4-4i\sqrt{3}\right) \times (-2i) + 8i \\ = \ & 8i + 8\sqrt{3} - 8i - 8i - 8i\sqrt{3} + 8i \\ = \ & 0. \end{aligned}$$
   donc $-2i$ est solution de $(E)$.

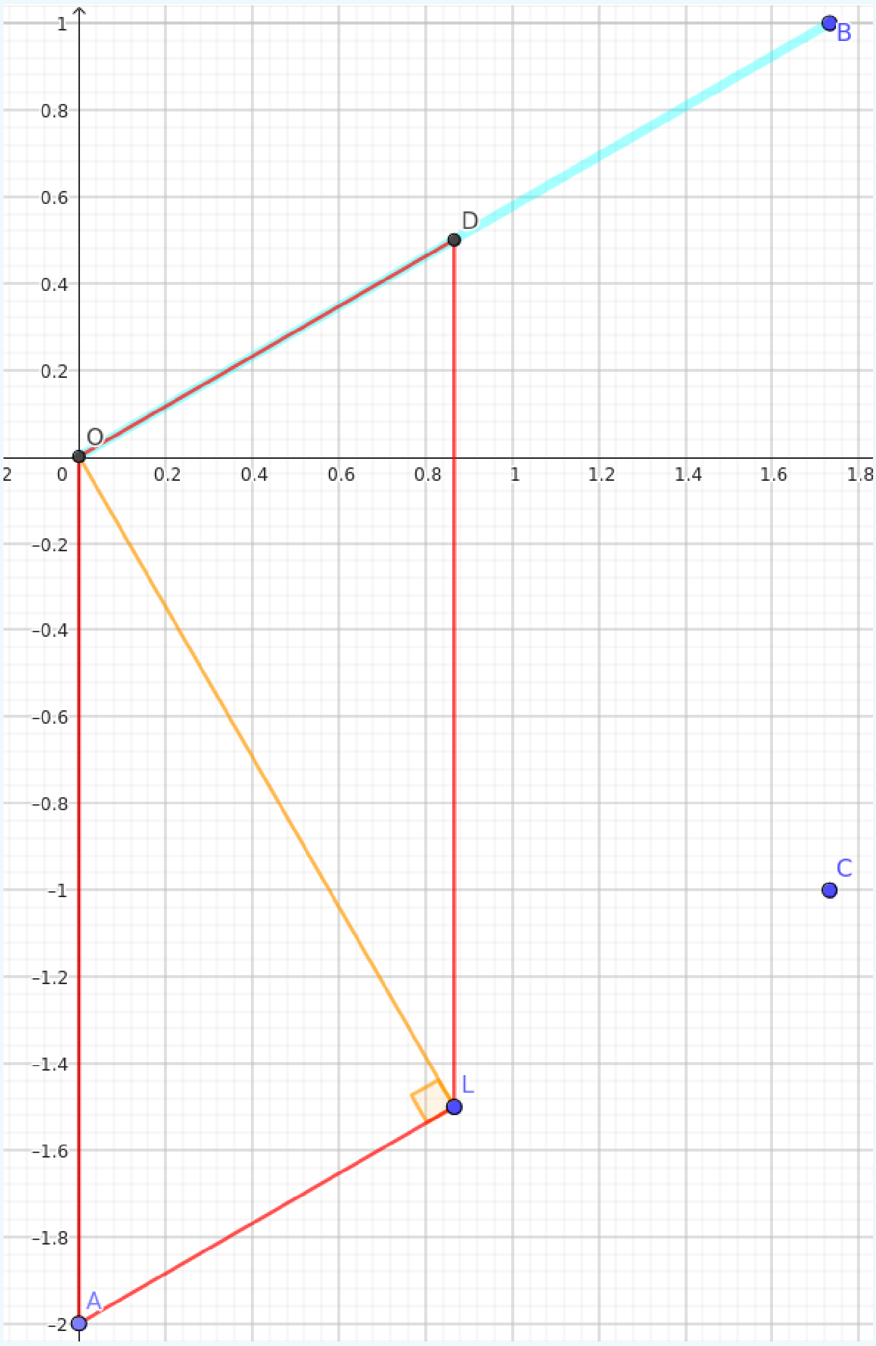
   (b) On a :
$$\begin{aligned} & (z+2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) \\ = \ & z^3 - 2i\sqrt{3}z^2 + 4z + 2iz^2 - 4\sqrt{3}z + 8i \\ = \ & z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2i\right)z^2 + \left(4-4i\sqrt{3}\right)z + 8i. \end{aligned}$$

2. (a) On a :

- $|z_A - z_0| = |-2i - 0| = |2i| = 2$ ;
- $|z_B - z_0| = |\sqrt{3} + i - 0| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ ;
- $|z_C - z_0| = |\sqrt{3} - i - 0| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Par suite, les distances $OA, OB$ et $OC$ sont toutes égales à 2 donc $A, B$ et $C$ appartiennent au cercle de centre $O$ et de rayon 2.

(b)



(c) Comme $D$ est le milieu du segment $[OB]$, on a $z_D = \frac{z_O+z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

De plus, $AODL$ étant un parallèlogramme, on a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DL}$ d'où $z_A - z_O = z_L - z_D$. Ainsi,

$$\begin{aligned} z_L &= z_A - z_O + z_D \\ &= -2i - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ z_L &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(d) Montrons que $AOL$ est rectangle en $L$ et n'est isocèle en aucun de ses sommets d'un seul coup.

Calculons les longueurs $OA, OL$ et $LA$ :

- $OA = |z_A| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ ;
- $OL = |z_L| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ ;
- $LA = |z_A - z_L| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Ainsi, les longueurs des côtés étant toutes différentes, le triangle n'est isocèle en aucun sommet et comme $LA^2 + OL^2 = 4 = OA^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $AOL$ est rectangle en $L$.

*Remarque : On peut également montrer que l'angle $\widehat{ALO}$ est droit.*
*Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LA})$ est donné par arg$(z_{\overrightarrow{LA}})$ − arg$(z_{\overrightarrow{LO}})$. On a :*

-

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{LA}} &= z_A - z_L \\ &= -2i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

*d'où arg$(z_{\overrightarrow{LA}}) = \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$.*

- $$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{LO}} &= z_O - z_L \\ &= -0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \\ &= \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_L &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

  *d'où* $arg(z_{\overrightarrow{LO}}) = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

*Par suite, on a :*

$$arg(z_{\overrightarrow{LA}}) - arg(z_{\overrightarrow{LO}}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$

*donc l'angle* $(\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LA})$ *est droit.*

*Il en résulte que* $AOL$ *est un triangle rectangle en* $L$*.*

*De plus, on peut vérifier ensuite que ce triangle n'a pas d'autre propriété remarquable ; il n'est pas isocèle en* $A$ *car les longueurs* $OA$ *et* $LA$ *sont différentes puis comme* $AOL$ *est rectangle en* $L$*, l'hypothénuse* $[AO]$ *est de longueur strictement supérieure aux deux autres côtés et donc il n'est pas non plus isocèle en* $L$ *ni en* $O$*.*