Correction de l'interrogation n°2

1. Exercice 1

Correction.

Partie 1

- **Affirmation 1 :** On a :

$$\begin{aligned} c &= 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 6\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ c &= 3-3i\sqrt{3} \end{aligned}$$

donc cette affirmation est **VRAIE**.

- **Affirmation 2 :** Comme c est donné sous forme trigonométrique, on a $|c|=6$ et $\arg(c)=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Par suite, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\arg(c^{6n})=6n\times\arg(c)=-2n\pi=0\ [2\pi].$$

Ainsi, c^{6n} est un réel ; donc cette affirmation est **VRAIE**.
Remarque : on pouvait également calculer c^3 qui vaut -6^3 puis conclure en remarquant que $c^{6n}=\left(c^3\right)^{2n}=\left(\left(-6^3\right)^2\right)^n=6^{6n}\in\mathbb{R}_+$.

- **Affirmation 3 :** Les points O, S et T sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires.
Or $z_{\overrightarrow{OS}}=z_S=\bar{c}$ et $z_{\overrightarrow{OT}}=z_T=\frac{1}{c}$, donc

$$\frac{z_{\overrightarrow{OS}}}{z_{\overrightarrow{OT}}}=c\bar{c}=|c|^2\in\mathbb{R}.$$

(on pouvait également calculer $c\bar{c}$).
Ainsi, il existe un réel k (ici $k=|c|^2\in\mathbb{R}$) tel que :

$$z_{\overrightarrow{OS}}=k\ z_{\overrightarrow{OT}}$$

d'où $\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OT}$ i.e. $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires.
Il en résulte que les points O, S et T sont alignés ; cette affirmation est donc **VRAIE**.
On aurait également pu calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OT})$ car les points O, S et T sont alignés si, et seulement si, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OT})$ est 0 ou π modulo 2π (ici, on trouve 0).

- **Affirmation 4 :** On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{c^n}\right|=\frac{1}{|c|^n}=\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

donc la suite $(|c^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $\frac{1}{6}$.
Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|c| + |c^2| + \ldots + |c^n| = \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1-1}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right).$$

Cette affirmation est donc **FAUSSE**.

Partie 2

- **Affirmation 5 :** On note $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Alors $z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $|z| = 1$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
  Par suite, on a :
  $$|z^8| = |z|^8 = 1^8 = 1$$
  et :
  $$\arg(z^8) = 8\times\arg(z) = -8\frac{\pi}{4} = -2\pi = 0\ [2\pi].$$
  D'où $z^8 = 1\times(\cos(0) + i\sin(0)) = 1$.
  Or $2002 = 8\times 250 + 2$ donc :
  $$z^{2002} = \left(z^8\right)^{250}\times z^2 = 1^{250}\times z^2 = z^2$$
  Or $|z^2| = |z|^2 = 1$ et $\arg(z^2) = 2\times\arg(z) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,
  d'où $z^2 = 1\times(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{2})) = -i$.
  Il en résulte que $z^{2002} = -i$; donc cette affirmation est **FAUSSE**.
  Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en calculant directement l'argument de z^{2002} *qui vaut* $-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *; comme celui-ci est différent, modulo* 2π*, de l'argument de i (qui vaut* $\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$*), ces deux nombres ne peuvent être égaux.*

- **Affirmation 6 :** On a :
  $$|z| = \frac{1}{5}|4+3i| = \frac{1}{5}\sqrt{16+9} = 1.$$
  Ainsi, $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$.
  Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}|z|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$.
  Cette affirmation est donc **FAUSSE**.

- **Affirmation 7 :** Comme $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, on a :
  $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$
  Ainsi,
  $$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$
  d'où, en appliquant la fonction racine carrée à cette égalité :
  $$|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et donc : } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Or $\frac{\pi}{8}$ appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction cos est strictement positive sur cet intervalle, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Il en résulte que cette affirmation est **VRAIE**.

- **Affirmation 8 :** On a $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Par suite, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

  Ainsi, on a, en remarquant que $1213 = 12 \times 101 + 1$:

$$\arg(z^{1213}) = 1213 \times \arg(z) = \underbrace{1213\frac{\pi}{6}}_{=101\times 2\pi+\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \neq 0\ [2\pi].$$

  donc cette affirmation est **FAUSSE**.

  Remarque : on aurait également pu faire un calcul direct de z^{1213} ; en effet, on remarque que $z^3 = 8i$ et donc $z^{1213} = z^{3\times404+1} = (8i)^{404}z = 8^{404}(\sqrt{3}+i)$ qui n'est pas un réel donc l'argument de z^{1213} ne peut pas être 0 modulo 2π.

2. Exercice 2

Correction.

1. (a) On a :
   - $|z_A - z_0| = |i\sqrt{2} - 0| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$;
   - $|z_C - z_0| = |-1 + i - 0| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;
   - $|z_D - z_0| = |-1 - i - 0| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

   Par suite, les distances OA, OC et OD sont toutes égales à $\sqrt{2}$ donc A, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

   (b) $ABED$ est un parallèlogramme si, et seulement si, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ d'où $z_B - z_A = z_E - z_D$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned} z_E &= z_D - z_A + z_B \\ &= -1 - i - i\sqrt{2} + \sqrt{3} + i \\ z_E &= (-1+\sqrt{3}) - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. (a) On met tout d'abord z_A, z_B et z_C sous forme trigonométrique ; on obtient :
   - $z_A = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$;
   - $z_B = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
   - $z_C = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

On en déduit les modules et des arguments de z_A, z_B et z_C puis :

$$\begin{aligned}
|z_F| &= \left|\frac{\sqrt{2}z_{\mathrm{B}}^2 z_{\mathrm{C}}^2}{4z_{\mathrm{A}}}\right| \\
&= \frac{\sqrt{2}|z_B|^2|z_C|^2}{4|z_A|} \\
&= -\frac{\sqrt{2}\times 4\times 2}{4\times\sqrt{2}} \\
|z_F| &= 2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\arg(z_F) &= \arg\left(\frac{\sqrt{2}z_{\mathrm{B}}^2 z_{\mathrm{C}}^2}{8z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi] \\
&= 2\arg(z_B) + 2\arg(z_C) - \arg(z_A)\ [2\pi] \\
&= 2\times\frac{\pi}{6} + 2\times\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\arg(z_F) &= \frac{\pi}{3} - \pi\ [2\pi] \\
\arg(z_F) &= -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient la forme trigonométrique de z_F :

$$z_F = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

puis la forme algébrique de z_F :

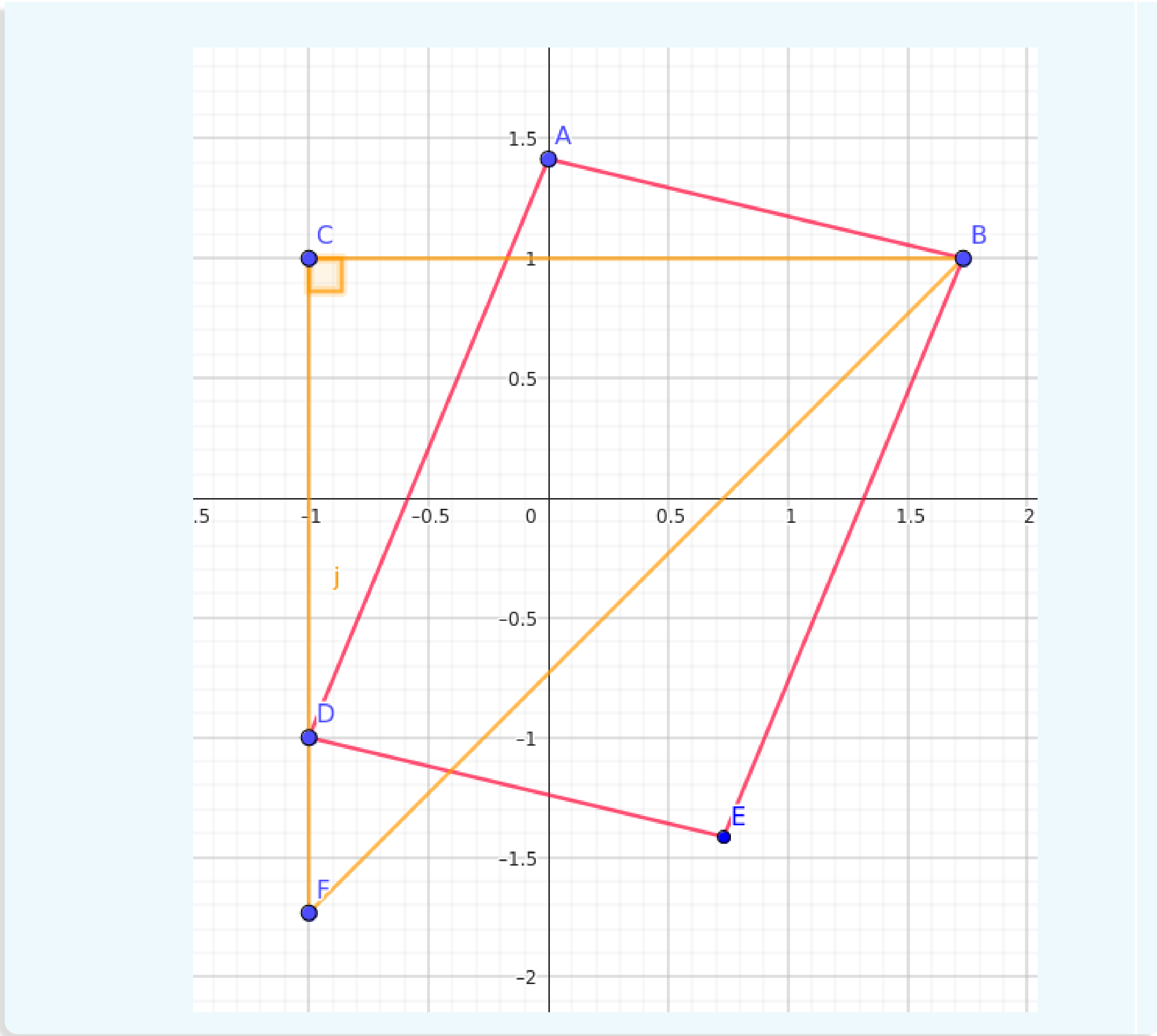
$$z_F = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

(b) Montrons que BCF est rectangle et isocèle en C.
Calculons les longueurs BC, CF et FB :

- $BC = |z_C - z_B| = |-1-\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$;
- $CF = |z_F - z_C| = |(-1-\sqrt{3})i| = 1+\sqrt{3}$;
- $FB = |z_B - z_F| = |(1+\sqrt{3})(1+i)| = (1+\sqrt{3})\sqrt{2}$.

Ainsi, les longueurs des côtés BC et CF sont égales, le triangle est isocèle en C mais pas équilatéral car les troisième côté est de longueur différente ; et comme $BC^2 + CF^2 = 2(1+\sqrt{3})^2 = FB^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, BCF est rectangle en C.

3.


A
B
C
D
E
F
j
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2