Correction de l'interrogation

1. Le Cours – 12 points

Exercice 1. *A COMPLETER SUR LA FEUILLE (4 points)*

-1 point par faute.

1. Compléter les affirmations suivantes avec les mots *multiple* ou *diviseur* :
   5 est un .... de 45 16 est un .... de 4 1 est un .... de 10^{30}
   0 est un .... de 10 101 est un .... de 0 -6 est un .... de -42
2. Compléter la définition suivante :
   Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in$..... tel que :
   $$a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Correction.

1. Compléter les affirmations suivantes avec les mots *multiple* ou *diviseur* :
   5 est un diviseur de 45 16 est un multiple de 4 1 est un diviseur de 10^{30}
   0 est un multiple de 10 101 est un diviseur de 0 -6 est un diviseur de -42
2. Compléter la définition suivante :
   Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
   $$a = bk.$$

Exercice 2. *Démonstrations (8 points)*

On justifiera soigneusement chaque affirmation.

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soit a, b, d des entiers relatifs. Montrer que si d divise a et d divise b, alors d divise $a + b$.
3. Démontrer qu'il n'existe pas d'entier relatif a et b tels que $16a - 58b = 2013$.
4. Montrer que si 3 divise $a^3 + b^3$ alors 3 divise $(a + b)^3$.

Correction.

1. Montrons la contraposée, i.e. si n est impair alors n^2 est impair.
   On suppose n impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Par suite,
   $$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in\mathbb{Z}} + 1$$

donc n^2 est impair.
Ainsi, la contraposée est vraie d'où n^2 est pair implique n est pair.

2. On suppose d divise a et d divise b. Alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = dp$ et $b = dq$. Ainsi, on a :
$$a + b = dap + dq = d\underbrace{(p+q)}_{\in\mathbb{Z}}$$
d'où d divise $a + b$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe des entiers relatifs a et b tels que $16a - 58b = 2013$.
Comme 2 divise $16(= 2\times 8)$, 2 divise $58(= 2\times 29)$ et $a, -b$ sont des entiers, par combinaison linéaire, 2 divise $16a - 58b = 2013$. Contradiction ! car 2013 est impair.
Par suite, il n'existe pas d'entier relatif a et b tels que $16a - 58b = 2013$.

4. On suppose 3 divise $a^3 + b^3$. On a :
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3(a^2b + ab^2)$$
Or 3 divise $a^3 + b^3$ et 3 divise $3\underbrace{(a^2b + ab^2)}_{\in\mathbb{Z}}$, donc par combinaison linéaire, 3 divise $(a^3 + b^3) + 3(a^2b + ab^2) = (a+b)^3$.

2. Les Exercices – 8 points

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n + 5$ divise $3n - 4$.
2. Dans la division euclidienne de 1814 par un entier naturel b non nul, le quotient est de 17 et le reste r.
Déterminer les valeurs possibles pour b et r.
3. Déterminer les nombres entiers naturels x et y tels que :
$$x^2 + 2xy = 35$$
4. Par quels entiers faut-il diviser 12 pour que le quotient de la division euclidienne soit égal au reste ?

Correction.

1. On suppose que $2n + 5$ divise $3n - 4$. Comme $2n + 5$ divise $2n + 5$, $2n + 5$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $2n+5$ et $3n-4$. En particulier, $2n+5$ divise :
$$3 \times (2n + 5) + (-2) \times (3n - 4) = 6n + 15 - 6n + 8 = 23$$
Or les diviseurs de 23 sont $-23, -1, 1, 23$ donc, on obtient :
   - $2n + 5 = -23$ i.e. $n = -14$ ou
   - $2n + 5 = -1$ i.e. $n = -3$ ou
   - $2n + 5 = 1$ i.e. $n = -2$ ou

- $2n+5=23$ i.e. $n=9$

Et réciproquement, pour :

- $n=-14$; $2n+5=-23 \mid -46=3n-4$
- $n=-3$; $2n+5=-1 \mid 3n-4$
- $n=-2$; $2n+5=1 \mid 3n-4$
- $n=9$; $2n+5=23 \mid 23=3n-4$

Par suite, $2n+5$ divise $3n-4$ si, et seulement si, $n=-14,-3,-2$ ou 9.

2. On a $1814=b\times 17+r$ avec $0\leq r<17$.
   Par suite :
   $$17b \leq b\times 17+r < b\times 17+b = 18b$$
   Or $17b\leq 1814$ implique $b\leq \frac{1814}{17}\simeq 106,7$ et $18b>1814$ implique $b>\frac{1814}{18}\simeq 100,7$, ainsi, comme b est un entier, on a $b=101,102,103,104,105,$ ou 106. Testons toutes ces possibilités :
   - $1814=101\times 17+97$ donc $b=101$ et $r=97$;
   - $1814=102\times 17+80$ donc $b=102$ et $r=80$;
   - $1814=103\times 17+63$ donc $b=103$ et $r=63$;
   - $1814=104\times 17+46$ donc $b=104$ et $r=46$;
   - $1814=105\times 17+29$ donc $b=105$ et $r=29$;
   - $1814=106\times 17+12$ donc $b=106$ et $r=12$.

3. Soit $x,y\in\mathbb{N}$ tels que $x^2+2xy=35$. Alors on a :
   $$x(x+2y)=x^2+2xy=35.$$
   Ainsi, comme $x,y\in\mathbb{N}$, on a $x,(x+2y)\in\mathbb{N}$ et ainsi x et $(x+2y)$ sont des diviseurs positifs de 35 dont le produit vaut 35. De plus, on remarque que $x+2y\geq x$ car $y\geq 0$.
   La liste des décompositions en produits ordonnées de diviseurs postifs de 35 est :
   - $35=1\times 35$;
   - $35=5\times 7$.

   Ainsi,
   $$\begin{cases} x=1 \\ x+2y=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=17 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=5 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$
   Réciproquement, on a $1\times(1+2\times 17)=35$ et $5\times(5+2\times 1)=35$.
   Il en résulte que les couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x^2+2xy=35$ sont $(1,17)$ et $(5,1)$.

4. On suppose que $12=bq+r$ avec $0\leq r<b$ avec $q=r$. Alors on a $12=br+r=(b+1)r$. Or $b+1$ et r sont des entiers positifs ($b+1$ est positif car r et 12 le sont) donc $b+1$, r sont des diviseurs positifs de 12 dont le produit vaut 12. De plus, on remarque que $b+1>r$ car $r<b$.
   La liste des décompositions en produits ordonnées de diviseurs postifs de 12 est :
   - $12=1\times 12$;
   - $12=2\times 6$;
   - $12=3\times 4$.

Par suite, on a les possibilités suivantes :

$$\begin{cases} r = 1 \\ b+1 = 12 \quad \text{i.e. } b = 11 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} r = 2 \\ b+1 = 6 \quad \text{i.e. } b = 5 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} r = 3 \\ b+1 = 4 \quad \text{i.e. } b = 3 \end{cases}$$

Réciproquement, pour $12 = bq + r$ avec :

- $b = 11$, on a $12 = 11 \times 1 + 1$ d'où $q = 1 = r$;
- $b = 5$, on a $12 = 5 \times 2 + 2$ d'où $q = 2 = r$;
- $b = 3$, on a $12 = 3 \times 3 + 3$ mais dans ce cas $r = 3 \not< 3 = b$ donc il ne s'agit pas d'une division euclidienne.

Donc les diviseurs possibles de 12 pour obtenir un quotient égal au reste dans la division euclidienne sont 5 et 11.